数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_1 = b_1 = 0,\quad a_{n+1} = a_n + 2,\quad b_{n+1} = a_n + b_n + \frac{4}{3}\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって定める.

(1) 一般項 a_n, b_n を求めよ.

(2) 関数の列 $f_n(x)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を

$$\begin{cases} f_1(x) = x^2 \\ f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_x^{x+2} f_n(t)\,dt \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \end{cases}$$

によって定める.

(ア) $f_2(x)$, $f_3(x)$ を求めよ.

(イ) すべての自然数 n について，$f_n(x) = x^2 + a_n x + b_n$ が成り立つことを，数学的帰納法によって証明せよ.

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_1 = b_1 = 0,\quad a_{n+1} = a_n + 2,\quad b_{n+1} = a_n + b_n + \frac{4}{3}\quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

によって定める．

（1） 一般項 a_n, b_n を求めよ．

（2） 関数の列 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を

$$\begin{cases} f_1(x) = x^2 \\ f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_x^{x+2} f_n(t)\,dt \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots) \end{cases}$$

によって定める．

(ア) $f_2(x)$, $f_3(x)$ を求めよ．

(イ) すべての自然数 n について，$f_n(x) = x^2 + a_n x + b_n$ が成り立つことを，数学的帰納法によって証明せよ．

【テーマ】：関数列

方針

(1) は，与えられた漸化式から $\{a_n\}$ が等差数列，$\{b_n\}$ に関する漸化式は，階差型の漸化式であることがわかります．(2) は，関数が漸化式の形で与えられているので，(ア) は具体的に代入して求められますし，(イ) は問題文にあるように数学的帰納法を用いて示しましょう．

解答

（1） 数列 $\{a_n\}$ は，初項 0，公差 2 の等差数列であるから，

$$a_n = 0 + (n-1)\cdot 2 \iff \boldsymbol{a_n = 2n - 2}\cdots\cdots(\text{答})$$

また，

$$b_{n+1} = b_n + 2n - 2 + \frac{4}{3} \iff b_{n+1} = b_n + 2n - \frac{2}{3}$$

$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(2k - \frac{2}{3}\right) \\ &= 2\cdot\frac{1}{2}n(n-1) - \frac{2}{3}(n-1) \\ &= n^2 - \frac{5}{3}n + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき，$b_1 = 1 - \dfrac{5}{3} + \dfrac{2}{3} = 0$ であるから，$n = 1$ のときも成り立つ．よって，

$$\boldsymbol{b_n = n^2 - \frac{5}{3}n + \frac{2}{3}}\cdots\cdots(\text{答})$$

（2） **【証明】**

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\int_x^{x+2} f_n(t)\,dt \cdots\cdots ①$$

(ア) 与えられた漸化式より,

$$f_2(x)=\frac{1}{2}\int_x^{x+2}t^2\,dt=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_x^{x+2}=\frac{1}{6}\{(x+2)^3-x^3\}=\boldsymbol{x^2+2x+\frac{4}{3}}\cdots\cdots(\text{答})$$

$$\begin{aligned}f_3(x)&=\frac{1}{2}\int_x^{x+2}\left(t^2+2t+\frac{4}{3}\right)dt\\&=x^2+2x+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\left[t^2+\frac{4}{3}t\right]_x^{x+2}\\&=x^2+2x+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\{(x+2)^2-x^2\}+\frac{2}{3}(x+2-x)\\&=\boldsymbol{x^2+4x+\frac{14}{3}}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

(イ) (i) $n=1$ のとき, $f_1(x)=x^2$ であるから, $a_1=b_1=0$ であることより成り立つ.

(ii) $n=k$ のとき, $f_k(x)=x^2+a_kx+b_k$ が成り立つと仮定すると,

$n=k+1$ のときは, ① に $n=k$ を代入して,

$$\begin{aligned}f_{k+1}(x)&=\frac{1}{2}\int_x^{x+2}f_k(t)\,dt\\&=\frac{1}{2}\int_x^{x+2}(t^2+a_kt+b_k)\,dt\\&=x^2+2x+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}a_kt^2+b_kt\right]_x^{x+2}\\&=x^2+2x+\frac{4}{3}+\frac{1}{4}a_k\{(x+2)^2-x^2\}+\frac{1}{2}b_k(x+2-x)\\&=x^2+2x+\frac{4}{3}+\frac{1}{4}a_k(4x+4)+b_k\\&=x^2+(a_k+2)x+a_k+b_k+\frac{4}{3}\end{aligned}$$

より, $a_{k+1}=a_k+2,\ b_{k+1}=a_k+b_k+\frac{4}{3}$ であることより $n=k+1$ のときも成り立つ.

以上より, すべての自然数 n に対して, $f_n(x)=x^2+a_nx+b_n$ が成り立つことが示された. **(証明終)**

◇ ♡

解説

(2) は, 漸化式の形で与えられた関数列を解く問題です. 漸化式と数学的帰納法は仕組みが同じなので, 問題文で数学的帰納法で証明せよと書かれていなくても自分で気付けるようになっておく必要があります. ちなみに, (1) の結果から,

$$f_n(x)=x^2+2(n-1)x+n^2-\frac{5}{3}n+\frac{2}{3}$$

であることがわかります. また, $f_3(x)$ の計算ですが, $\frac{1}{2}\int_x^{x+2}t^2\,dt$ は, $f_2(x)$ で計算をしているので, その結果を用いています. (イ) における数学的帰納法での証明の途中でも利用しています.

点 P$(x,\ y)$ $(x>0)$ は，曲線 $y=x^3$ 上の点とする．P を通るこの曲線の 2 本の接線が x 軸と交わる点を A, B とし，$\angle \mathrm{APB}=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．

（1） $\cos\theta$ を x を用いて表せ．

（2） $\tan\theta$ が最大となる x の値を求めよ．

点 P$(x,\ y)$ $(x>0)$ は，曲線 $y=x^3$ 上の点とする．P を通るこの曲線の 2 本の接線が x 軸と交わる点を A, B とし，$\angle\mathrm{APB}=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．

（1） $\cos\theta$ を x を用いて表せ．

（2） $\tan\theta$ が最大となる x の値を求めよ．

【テーマ】：三角関数の図形への応用

方針

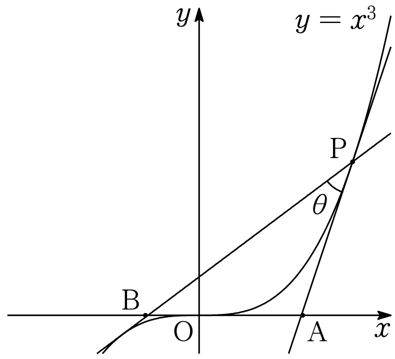
点 P を通る接線は 2 本あるので，その方程式を求めてなす角を計算します． $\tan\theta$ の最大値は，(1) で求めた $\cos\theta$ の値から $\tan\theta$ を求めれば分数式になるため，相加平均・相乗平均の関係を用いて最大値を求めます．等号成立条件が，求めたい x の値になります．

♣ ♠

解答

（1） $y'=3x^2$ であるから，接点を $(t,\ t^3)$ とすれば，この点における接線の方程式は，

$$Y=3t^2(X-t)+t^3 \iff Y=3t^2X-2t^3$$



となる．これが点 P$(x,\ x^3)$ を通るので，

$$x^3=3t^2x-2t^3 \iff 2t^3-3t^2x+x^3=0$$
$$\iff (t-x)^2(2t+x)=0$$

よって，$t=x,\ -\dfrac{x}{2}$ を得る．ゆえに，2 本の接線の方程式は，

$$\begin{cases} Y=3x^2X-2x^3 & \cdots\cdots ① \\ Y=\dfrac{3}{4}x^2X+\dfrac{x^3}{4} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

$Y=0$ とすれば，① のとき，$X=\dfrac{2}{3}x$，② のとき，$X=-\dfrac{x}{3}$ となる．ゆえに，A$\left(\dfrac{2}{3}x,\ 0\right)$, B$\left(-\dfrac{x}{3},\ 0\right)$ とおくことができる．

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\left(-\dfrac{1}{3}x,\ -x^3\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\left(-\dfrac{4}{3}x,\ -x^3\right)$ より，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}=\frac{\dfrac{4}{9}x^2+x^6}{\sqrt{\dfrac{1}{9}x^2+x^6}\sqrt{\dfrac{16}{9}x^2+x^6}}=\boldsymbol{\frac{9x^4+4}{\sqrt{(9x^4+1)(9x^4+16)}}}\cdots\cdots(\text{答})$$

（2） $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ であり，$\tan\theta>0$ であるから，

$$\tan\theta=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}-1}=\sqrt{\frac{(9x^4+1)(9x^4+16)}{(9x^4+4)^2}-1}$$
$$=\frac{9x^2}{9x^4+4}=\frac{9}{9x^2+\dfrac{4}{x^2}}$$

$x^2>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係から，

$$9x^2+\frac{4}{x^2}\geqq 2\sqrt{9x^2\cdot\frac{4}{x^2}}=2\sqrt{36}=12$$

よって,

$$\tan\theta = \frac{9}{9x^2+\frac{4}{x^2}} \leqq \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

等号は, $9x^2 = \frac{4}{x^2}$ かつ $x>0$ すなわち $x=\frac{\sqrt{6}}{3}$ のとき成立する. ゆえに, 求める x の値は,

$$\boldsymbol{x = \frac{\sqrt{6}}{3}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

(1) は, 様々な方法で求めることができます. 解答では A, B の座標を求めましたが, 座標を求めなくても接線の方向ベクトルを考えることで $\cos\theta$ の値を求めることができます.

別解

①, ② の方向ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ とすると,

$$\vec{a} = (1,\ 3x^2),\quad \vec{b} = (4,\ 3x^2)$$

である. $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が θ なので,

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{4+9x^4}{\sqrt{1+9x^4}\sqrt{16+9x^4}} = \boldsymbol{\frac{9x^4+4}{\sqrt{(9x^4+1)(9x^4+16)}}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

である.

ある直線 ℓ があって, その傾きが k であれば, その方向ベクトル $\vec{a}$ は, $\vec{a} = (1,\ k)$ となります. これは図を考えてみれば明らかです. 別解の $\vec{b}$ は, 成分が整数となるように x 座標の値と y 座標の値を 4 倍しています. ベクトルなので, $\left(1,\ \frac{3}{4}x^2\right) /\!/ (4,\ 3x^2)$ となります. 分数式の最大値や最小値を求めたいときは, 文字が正であることに着目して, 相加平均・相乗平均の関係が使えるかどうかを考えることが大切です.

z を絶対値が 1 の複素数とする．このとき以下の問いに答えよ．

（1） $z^3 - z$ の実部が 0 となるような z をすべて求めよ．

（2） $z^5 + z$ の絶対値が 1 となるような z をすべて求めよ．

（3） n を自然数とする．$z^n + 1$ の絶対値が 1 となるような z をすべてかけ合わせて得られる複素数を求めよ．

z を絶対値が 1 の複素数とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1)　$z^3 - z$ の実部が 0 となるような z をすべて求めよ．

(2)　$z^5 + z$ の絶対値が 1 となるような z をすべて求めよ．

(3)　n を自然数とする．$z^n + 1$ の絶対値が 1 となるような z をすべてかけ合わせて得られる複素数を求めよ．

【テーマ】：極形式とド・モアブルの定理

方針

$|z| = 1$ であるから $z = \cos\theta + i\sin\theta$ とおいて考えます．また，2 つの複素数 $\arg(z_1) = \theta_1$, $\arg(z_2) = \theta_2$ において，$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ が成り立つことを利用します．

解答

(1)　$|z| = 1$ であるから，$z = \cos\theta + i\sin\theta$ $(-\pi < \theta \leqq \pi)$ とおくことができる．よって，

$$\begin{aligned} z^3 - z &= (\cos\theta + i\sin\theta)^3 - (\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= \cos 3\theta - \cos\theta + i(\sin 3\theta - \sin\theta) \end{aligned}$$

となる．実部が 0 であることから，

$$\cos 3\theta - \cos\theta = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\theta(\cos^2\theta - 1) = 0$$

よって，$\cos\theta = 0, \pm 1$ である．$-\pi < \theta \leqq \pi$ より，

$$\theta = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pi$$

であるから，求める複素数 z は，$\boldsymbol{z = \pm 1, \pm i}$……(答)

(2)　$z^5 = \cos 5\theta + i\sin 5\theta$ である．

$$\begin{aligned} z^5 + z &= (\cos\theta + i\sin\theta)^5 + (\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= \cos 5\theta + \cos\theta + i(\sin 5\theta + \sin\theta) \end{aligned}$$

$|z^5 + z| = 1$ であるから，$|z^5 + z|^2 = 1$ である．ゆえに，

$$(\cos 5\theta + \cos\theta)^2 + (\sin 5\theta + \sin\theta)^2 = 1$$

$$\cos^2 5\theta + 2\cos 5\theta\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2 5\theta + 2\sin 5\theta\sin\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$2(\cos 5\theta\cos\theta + \sin 5\theta\sin\theta) + 2 = 1$$

$$2\cos(5\theta - \theta) = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos 4\theta = -\frac{1}{2}$$

$-\pi < \theta \leqq \pi$ であるから，$-4\pi < 4\theta \leqq 4\pi$ である．よって，

$$4\theta = -\frac{10}{3}\pi, -\frac{8}{3}\pi, -\frac{4}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi, \frac{10}{3}\pi$$

$$\theta = -\frac{5}{6}\pi, -\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi$$

ゆえに，

$$\boldsymbol{z = \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i}$$ **（複号任意）……（答）**

(3)　$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ である．

$$z^n + 1 = (\cos\theta + i\sin\theta)^n + 1 = \cos n\theta + 1 + i\sin n\theta$$

$|z^n + 1| = 1$ であるから，$|z^n + 1|^2 = 1$ である．よって，

$$(\cos n\theta + 1)^2 + \sin^2 n\theta = 1$$

$$\cos^2 n\theta + 2\cos n\theta + 1 + \sin^2 n\theta = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos n\theta = -\frac{1}{2}$$

ゆえに，$n\theta = \pm\left(\frac{2}{3}\pi + k\times 2\pi\right)$（$k$ は 0 以上の整数）と表すことができる．$n = 1, 2, 3, \cdots$ とするとき，

$$\theta = \pm\frac{2}{3}\pi,\ \theta = \pm\frac{2}{3}\pi, \pm\frac{4}{3}\pi,\ \theta = \pm\frac{2}{3}\pi, \pm\frac{4}{3}\pi, \pm\frac{8}{3}\pi, \theta = \ \cdots\cdots$$

のようになるため，$\arg z = \theta$ と $\arg z = -\theta$ である複素数がセットで現れる．そのため，m を自然数として一方の複素数を z_m とすればもう一方の複素数は $\overline{z_m}$ となる．
ゆえに，求める複素数の積は，$z_m\overline{z_m} = |z_m|^2 = 1$ であることから，

$$z_1\overline{z_1}\cdot z_2\overline{z_2}\cdot z_3\overline{z_3}\cdot\cdots\cdots\cdot z_n\overline{z_n} = |z_1|^2|z_2|^2|z_3|^2\cdots\cdots|z_n|^2 = \mathbf{1}$$ **……（答）**

となる．

◇　♡

解説

(1) は，極形式で表さなくても次のようにして解くことができます．

別解

題意より，$z^3 - z$ は純虚数であるから，

$$z^3 - z = -\overline{(z^3 - z)}$$

が成り立つ．この式を変形すると，

$$\begin{aligned}
z^3 - z = -(\overline{z})^3 + \overline{z} \quad &\Longleftrightarrow \quad z^3 + (\overline{z})^3 - (z + \overline{z}) = 0\\
&\Longleftrightarrow \quad (z + \overline{z})\{z^2 - z\overline{z} + (\overline{z})^2\} - (z + \overline{z}) = 0\\
&\Longleftrightarrow \quad (z + \overline{z})\{z^2 - z\overline{z} + (\overline{z})^2 - 1\} = 0\\
&\Longleftrightarrow \quad (z + \overline{z})\{z^2 - 2z\overline{z} + (\overline{z})^2\} = 0 \quad (\because\ \ |z|^2 = 1 \Longleftrightarrow z\overline{z} = 1)\\
&\Longleftrightarrow \quad (z + \overline{z})(z - \overline{z})^2 = 0
\end{aligned}$$

ゆえに，$z = -\overline{z}$ または $z = \overline{z}$ すなわち z は実数または純虚数である．$|z| = 1$ であることから，求める複素数 z は，$\boldsymbol{z = \pm 1, \pm i}$**……（答）**

(2) の複号任意というのは，符号はすべての組合せをとるということを意味します．すなわち，$z = \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$（複号任意）とは，

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

の 4 つを表しています．

(3) では，複素数の積を考えます．複素数の積は偏角の和になります．$\arg z = \theta$ と $\arg z = -\theta$ となる複素数がセットで現れるのですから，その和は 0 となります．すなわち積は $\cos 0 + i\sin 0 = 1$ になるということです．

数列 $\{a_n\}$ を

$$\begin{cases} a_1 = 2\sqrt{2} \\ a_n > 0, \quad a_1{}^{\frac{1}{n}} a_2{}^{\frac{1}{n}} \cdots a_{n-1}{}^{\frac{1}{n}} a_n{}^{\frac{2}{n}} = 8 \quad (n \geqq 2) \end{cases}$$

で定めるとき，次の問いに答えよ．

（1） $b_n = \log_2 a_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

（2） $c_n = a_1 a_2 \cdots a_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

（3） $10^k \leqq c_{11} < 10^{k+1}$ となる整数 k を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

数列 $\{a_n\}$ を

$$\begin{cases} a_1 = 2\sqrt{2} \\ a_n > 0, \quad a_1{}^{\frac{1}{n}} a_2{}^{\frac{1}{n}} \cdots a_{n-1}{}^{\frac{1}{n}} a_n{}^{\frac{2}{n}} = 8 \quad (n \geqq 2) \end{cases}$$

で定めるとき，次の問いに答えよ．

(1)　$b_n = \log_2 a_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)　$c_n = a_1 a_2 \cdots a_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(3)　$10^k \leqq c_{11} < 10^{k+1}$ となる整数 k を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

【テーマ】：隣接二項間漸化式

方針

(1) は，$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ として考えます．(2) は，与えられた式を c_n と a_n で表し，底を 2 とする対数をとって (1) を用います．(3) は，(2) の結果を利用して計算します．

♣　♠

解答

(1)　$a_n > 0$ であるから，与えられた等式の両辺に底が 2 の対数をとると，

$$\log_2 a_1{}^{\frac{1}{n}} a_2{}^{\frac{1}{n}} \cdots a_{n-1}{}^{\frac{1}{n}} a_n{}^{\frac{2}{n}} = \log_2 8$$

$$\frac{1}{n}\log_2 a_1 + \frac{1}{n}\log_2 a_2 + \cdots + \frac{1}{n}\log_2 a_{n-1} + \frac{2}{n}\log_2 a_n = 3$$

$$\frac{1}{n}\left(\log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \cdots + \log_2 a_{n-1} + \log_2 a_n\right) + \frac{1}{n}\log_2 a_n = 3$$

$$\frac{1}{n}(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n) + \frac{1}{n}b_n = 3$$

ここで，$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ とおくと，

$$\frac{1}{n}S_n + \frac{1}{n}b_n = 3 \iff S_n + b_n = 3n \cdots\cdots ①$$

よって，$S_{n+1} + b_{n+1} = 3(n+1) \cdots\cdots ②$ が成り立つので，② − ① より，

$$S_{n+1} - S_n + b_{n+1} - b_n = 3 \iff b_{n+1} + b_{n+1} - b_n = 3 \iff b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2}$$

を得る．これを変形すると，

$$b_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}(b_n - 3)$$

となるので，数列 $\{b_n - 3\}$ は初項 $b_1 - 3 = \log_2 a_1 - 3 = -\frac{3}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である．よって，

$$b_n - 3 = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n \iff \boldsymbol{b_n = 3\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}} \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　与式より，

$$(a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n)^{\frac{1}{n}} a_n{}^{\frac{1}{n}} = 8 \iff (c_n)^{\frac{1}{n}} a_n{}^{\frac{1}{n}} = 8 \iff c_n a_n = 8^n$$

であるから，両辺に底が 2 の対数をとると，

$$\log_2 c_n + \log_2 a_n = 3n \iff \log_2 c_n = 3n - b_n$$

(1) より,

$$\log_2 c_n = 3n - 3\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

であるから,

$$\boldsymbol{c_n = 2^{3\left\{n-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(3) $10^k \leqq c_{11} < 10^{k+1}$ の各辺に底が 2 の対数をとると,

$$\log_2 10^k \leqq \log_2 c_{11} < \log_2 10^{k+1}$$

$$k\log_2 10 \leqq 30 + \frac{3}{2^{11}} < (k+1)\log_2 10 \quad\Longleftrightarrow\quad k \leqq \left(30 + \frac{3}{2^{11}}\right)\frac{1}{\log_2 10} < k+1$$

であるから, $\dfrac{1}{\log_2 10} = \log_{10} 2$ であることを用いると,

$$\left(30 + \frac{3}{2^{11}}\right)\log_{10} 2 - 1 < k \leqq \left(30 + \frac{3}{2^{11}}\right)\log_{10} 2 \cdots\cdots ③$$

となる. ここで,

$$\left(30 + \frac{3}{2^{11}}\right)\log_{10} 2 = \left(30 + \frac{3}{2^{11}}\right)\times 0.3010 = 9.03 + \frac{0.9030}{2^{11}} \fallingdotseq 0.903$$

であるから, ③ を満たす整数 k の値は, $\boldsymbol{k = 9}$……**(答)**

◇ ♡

解説

誘導が丁寧なので, 比較的方針が立て易い問題ですが, (1) で $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ をおき, $S_{n+1} - S_n = b_{n+1}$ を用いるということに気がつかなければ先に進めません. 計算力の必要な問題ではありますが, 漸化式に関する経験が必要な問題なので, 演習不足では完答できません.

(1) は, $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ とおいて考えることがポイントになります. 数列 $\{b_n\}$ に関する隣接二項間漸化式が導ければあとは解けないといけません. (2) は $c_n a_n = 8^n$ という式まで変形できれば, (1) の結果を用いるため, 両辺に底が 2 の対数をとります. 積 → 和に変換するには対数を利用することがポイントです. (3) では, $\dfrac{3}{2^{11}}$ を計算する必要はなく, $9.03 + \dfrac{0.9030}{2^{11}} \fallingdotseq 9.03$ であることに気がつけば容易に k の値を求めることができるでしょう.

$a,\ b$ が実数の範囲を動くとき，定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\sin x-b\cos x)^2\,dx$ の最小値を求めよ．また，そのときの $a,\ b$ の値を求めよ．

a, b が実数の範囲を動くとき，定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\sin x-b\cos x)^2\,dx$ の最小値を求めよ．また，そのときの a, b の値を求めよ．

【テーマ】：定積分の最大・最小

方針

定積分を計算すると a, b に関する 2 変数関数になるので，平方完成を利用して最小値を求めます．

♣ ♠

解答

$I=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\sin x-b\cos x)^2\,dx$ とおくと，

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x-2ax\sin x-2bx\cos x+2ab\sin x\cos x)\,dx$$

である．ここで，

x^2, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $x\sin x$ は偶関数，$x\cos x$, $\sin x\cos x$ は奇関数

であるから，

$$I=2\int_{0}^{\pi}(x^2+a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x-2ax\sin x)\,dx$$

となる．

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx&=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx\\&=\left[\,\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\,\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx&=\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx\\&=\left[\,\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\,\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}x\sin x\,dx&=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx\\&=\pi+\Big[\,\sin x\,\Big]_0^{\pi}=\pi\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi}x^2\,dx=\left[\,\frac{1}{3}x^3\,\right]_0^{\pi}=\frac{1}{3}\pi^3$$

であるから，

$$\begin{aligned}I&=2\left(\frac{1}{3}\pi^3+\frac{\pi}{2}a^2+\frac{\pi}{2}b^2-2a\pi\right)\\&=\pi(a^2-4a)+\pi b^2+\frac{2}{3}\pi^3\\&=\pi(a-2)^2+\pi b^2+\frac{2}{3}\pi^3-4\pi\end{aligned}$$

となる．よって，I は，

$a=2$, $b=0$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi^3-4\pi}$……(答)

をとる．

♢ ♡

解説

定積分の最大値・最小値を求める問題で，計算問題としてしばしば出題されています．与えられた定積分を素直に計算して最小値を求めますが，a, b の 2 変数関数になるため，2 変数関数の最小値を求める術を知らなければ後半は難しく感じるかもしれません．しかし，経験があれば基本的な問題に見えるでしょう．本問は，積分区間が $-\pi \leqq x \leqq \pi$ なので，偶関数と奇関数に着目することで計算量を減らすことができます．

【奇関数と偶関数】

奇関数と偶関数に関する基本事項をまとめておこう．

関数 $y=f(x)$ に対して，

（i） $f(x)$ が**奇関数**ならば，　$f(-x)=-f(x)$　**原点対称である関数**

（ii） $f(x)$ が**偶関数**ならば，　$f(-x)=f(x)$　　y **軸対称である関数**

が成り立つ．

【偶関数と奇関数の定積分】

$f(x)$ を奇関数，$g(x)$ を偶関数とする．a を正の定数とするとき，次式が成り立つ．

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0 \qquad \int_{-a}^{a} g(x)\,dx=2\int_{0}^{a} g(x)\,dx$$

空間において，原点 O を通らない平面 α 上に一辺の長さ 1 の正方形があり，その頂点を順に A, B, C, D とする．このとき，以下の問いに答えよ．

（1） ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

（2） $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC}$ のとき，ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

が，平面 α と垂直であることを示せ．

空間において，原点 O を通らない平面 α 上に一辺の長さ 1 の正方形があり，その頂点を順に A, B, C, D とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　ベクトル $\overrightarrow{OD}$ を，$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ．

(2)　OA = OB = OC のとき，ベクトル

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$$

が，平面 α と垂直であることを示せ．

【テーマ】：空間ベクトル

方針

(1) は，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ であることを用います．(2) は，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ と $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ が垂直であることを示します．

♣ ♠

解答

(1)　$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ であるから，始点を O に変換すると，

$$\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　**【証明】**

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ とおくと，(1) の結果を用いて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\\&=2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)\end{aligned}$$

また，$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ との内積を考える．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}&=2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\\&=2\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\right)\cdots\cdots①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AC}&=2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)\\&=2\left(\left|\overrightarrow{OC}\right|^2-\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\right)\cdots\cdots②\end{aligned}$$

ここで，$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$ であるから，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ である．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0&\iff\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)=0\\&\iff\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0\cdots\cdots③\end{aligned}$$

題意より，$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|$ であるから，

② より，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

①, ③ より，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は平面 α に対して垂直であることが示された.

（証明終）

◇ ♡

解説

(1) は，4 点 A, B, C, D の関係式を作って始点を O に変換すれば目的の式が得られると考えます.

(2) は，一般に平面に垂直なベクトル $\vec{n}$ は，平面上の 1 次独立な 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ と垂直になります．すなわち，平面 α と垂直であることを示すためには，$\vec{n}\cdot\vec{a}=0$ かつ $\vec{n}\cdot\vec{b}=0$ であることを示せばよいのです．本問を解くポイントは，四角形 ABCD が正方形であることから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を利用することです．これは，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ でも構いませんが，(1) の結果を使えば D は消去できるので，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であることを用いてあらかじめ D を使わない式を作る方がよいでしょう．なお，本問で正方形の 1 辺の長さが 1 と与えられていますが，この条件は問題を解く際は不要です.

点 $\mathrm{P}(t,\ s)$ が $s=\sqrt{2}t^2-2t$ を満たしながら xy 平面上を動くときに，点 P を原点を中心として 45° 回転した点 Q の軌跡として得られる曲線を C とする．さらに，曲線 C と x 軸で囲まれた図形を D とする．

（1） 点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ の座標を，t を用いて表せ．

（2） 直線 $y=a$ と曲線 C がただ 1 つの共有点を持つような定数 a の値を求めよ．

（3） 図形 D を y 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積 V を求めよ．

点 $\mathrm{P}(t,\,s)$ が $s=\sqrt{2}t^2-2t$ を満たしながら xy 平面上を動くときに，点 P を原点を中心として 45° 回転した点 Q の軌跡として得られる曲線を C とする．さらに，曲線 C と x 軸で囲まれた図形を D とする．

(1) 点 $\mathrm{Q}(x,\,y)$ の座標を，t を用いて表せ．

(2) 直線 $y=a$ と曲線 C がただ 1 つの共有点を持つような定数 a の値を求めよ．

(3) 図形 D を y 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積 V を求めよ．

【テーマ】：回転体の体積

方針

(1) は，原点まわりの回転を考えるため複素数を活用します．(3) は，体積計算の基本に戻って計算する方法とバウムクーヘン積分で計算する方法があります．

♣ ♠

解答

(1) 点 $\mathrm{P}(t,\,s)$ を複素数平面上の点に置き換えるとき，$z=t+si$ と表すことができる．この点を原点のまわりに 45° 回転するので，回転後の複素数を w とすると，

$$\begin{aligned} w &= z(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) \\ &= (t+si)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(t+si)(1+i) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{t-s+(t+s)i\right\} \end{aligned}$$

ここで，$s=\sqrt{2}t^2-2t$ であるから，

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{t-\left(\sqrt{2}t^2-2t\right)+\left(t+\sqrt{2}t^2-2t\right)i\right\} \\ &= \left(\frac{3}{\sqrt{2}}t-t^2\right)+\left(t^2-\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)i \end{aligned}$$

ゆえに，xy 平面に戻せば求める点 Q の座標は，

$$\mathbf{Q}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}t-t^2,\quad t^2-\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) (1) より，曲線 C の y 座標は $y=t^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t$ であるから，直線 $y=a$ と曲線 C がただ 1 つの共有点をもつためには，

$$t^2-\frac{1}{\sqrt{2}}t=a \iff t^2-\frac{1}{\sqrt{2}}t-a=0$$

がただ 1 つの実数解をもてばよい．ゆえに，判別式を D とすると，

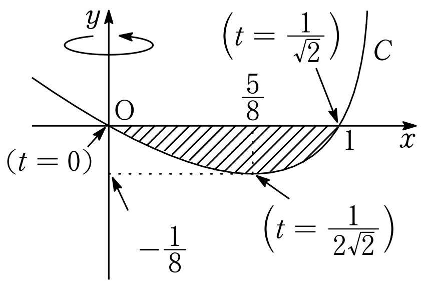
$$D=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-4(-a)=0 \iff \boldsymbol{a=-\frac{1}{8}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(3) 曲線 C と x 軸との共有点を求める．$y=0$ として，

$$t^2-\frac{1}{\sqrt{2}}t=0 \iff t\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$$

よって，$t=0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから，このとき $x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}t-t^2$ より，x の値はそれぞれ $x=0,\,1$ である．ゆえに，曲線 C と x 軸との交点は，$(0,\,0),\,(1,\,0)$ である．また，$y=-\dfrac{1}{8}$ のとき，(2) より，$t=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ である．

曲線 C の概形は右図のようになるので，曲線 C と直線 $y=k\ \left(-\dfrac{1}{8}<y\leqq 0\right)$ との交点の x 座標を x_1，x_2 $(x_1<x_2)$ とすると，回転体を平面 $y=k$ で切ったときの切断面の面積 S は，



$$S=\pi {x_2}^2-\pi {x_1}^2$$

と表すことができる．ゆえに，求める体積 V は，

$$\begin{aligned}
V&=\int_{-\frac{1}{8}}^{0}(\pi {x_2}^2-\pi {x_1}^2)\,dk\\
&=\int_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi {x_2}^2\frac{dk}{dt}\,dt-\int_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{0}\pi {x_1}^2\frac{dk}{dt}\,dt\\
&=\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi x^2\frac{dk}{dt}\,dt\\
&=\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi\left(\frac{3}{\sqrt{2}}t-t^2\right)^2\left(2t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)dt\\
&=\pi\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(2t^5-\frac{13\sqrt{2}}{2}t^4+12t^3-\frac{9\sqrt{2}}{4}t^2\right)dt\\
&=\pi\left[\ \frac{1}{3}t^6-\frac{13\sqrt{2}}{10}t^5+3t^4-\frac{3\sqrt{2}}{4}t^3\ \right]_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\\
&=\pi\left(\frac{1}{24}-\frac{13}{40}+\frac{3}{4}-\frac{3}{8}\right)\\
&=\boldsymbol{\frac{11}{120}\pi}\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

解説

(1) は，原点まわりに点を移動させるため複素数平面を用いました．行列を学習している人は，行列を用いて計算することもできます．(2) は，(3) を解くためのヒントになっています．(3) は，回転体の切り口の面積を積分するという教科書通りの計算方法で体積を求めていますが，バウムクーヘン積分（証明は割愛します）を用いると次のように計算することもできます．置換積分法を用いて変数を t にして計算します．計算は割愛します．

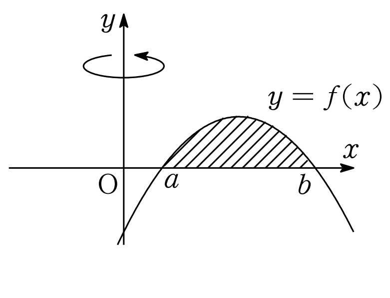
別解

$$\begin{aligned}
V&=\int_{0}^{1}2\pi x(-y)\,dx\\
&=2\pi\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}t-t^2\right)\left(-t^2+\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-2t\right)dt=\cdots\cdots=\boldsymbol{\frac{11}{120}\pi}\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

【バウムクーヘン積分】

右図のような関数 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は，次のように求めることができる．

$$V=\int_{a}^{b}2\pi xf(x)\,dx$$



以下の問いに答えよ．

（1） n が正の偶数のとき，2^n-1 は 3 の倍数であることを示せ．

（2） n を自然数とする．2^n+1 と 2^n-1 は互いに素であることを示せ．

（3） $p,\,q$ を異なる素数とする．$2^{p-1}-1=pq^2$ を満たす $p,\,q$ の組をすべて求めよ．

以下の問いに答えよ．

（1） n が正の偶数のとき，2^n-1 は 3 の倍数であることを示せ．

（2） n を自然数とする．2^n+1 と 2^n-1 は互いに素であることを示せ．

（3） p, q を異なる素数とする．$2^{p-1}-1=pq^2$ を満たす p, q の組をすべて求めよ．

【テーマ】：整数問題

方針

(1) は，二項定理や合同式を用いて証明をします．(2) は，最大公約数を g として式を作ります．(3) は，(1) から p, q は奇数の素数であることがわかるので，これを利用して p, q の値を求めます．

♣ ♠

解答

（1） **【証明】**

n は偶数なので，$n=2k$（k は自然数）とおける．よって，二項定理を用いると，

$$\begin{aligned}2^n-1&=2^{2k}-1\\&=4^k-1\\&=(3+1)^k-1\\&={}_k\mathrm{C}_0\cdot3^k+{}_k\mathrm{C}_1\cdot3^{k-1}+\cdots\cdots+{}_k\mathrm{C}_{k-1}\cdot3+{}_k\mathrm{C}_k-1\\&=3\left({}_k\mathrm{C}_0\cdot3^{k-1}+{}_k\mathrm{C}_1\cdot3^{k-2}+\cdots\cdots+{}_k\mathrm{C}_{k-1}\right)\end{aligned}$$

${}_k\mathrm{C}_0\cdot3^{k-1}+{}_k\mathrm{C}_1\cdot3^{k-2}+\cdots\cdots+{}_k\mathrm{C}_{k-1}$ は自然数であるから，2^n-1 は 3 の倍数である．

ゆえに，示された．　**（証明終）**

（2） **【証明】**

$2^n+1,\ 2^n-1$ の最大公約数を g とすると，

$$\begin{cases}2^n+1=ga' & \cdots\cdots\ ①\\ 2^n-1=gb' & \cdots\cdots\ ②\end{cases}\qquad (a',\ b' \text{ は互いに素})$$

とおくことができる．①－② より，

$$2=g(a'-b')$$

となる．このとき，$(g,\ a'-b')=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$ であるが，$2^n+1,\ 2^n-1$ はともに奇数であるから，$g=2$ は不適．したがって，$g=1,\ a'-b'=2$ である．よって，$2^n+1,\ 2^n-1$ は互いに素であることが示された．

（証明終）

（3） $2^{p-1}-1=pq^2\ \cdots\cdots\ ①$

$p-1\geqq1$ であるから，$2^{p-1}-1$ は奇数であるから，p, q は 3 以上の素数である．よって，$p-1$ は正の偶数となるので，(1) の結果から，$2^{p-1}-1$ は 3 の倍数である．ゆえに，pq^2 が 3 の倍数となるので，p または q のいずれかが 3 である．

（i） $p=3$ のとき，① は $2^2-1=3q^2$ となるので，$q^2=1$ となるので不適.

（ii） $q=3$ のとき，$p=2m+1$（m は自然数）とすると，① は，

$$2^{2m}-1=9(2m+1) \quad \Longleftrightarrow \quad (2^m+1)(2^m-1)=9(2m+1)$$

である.（2）より，2^m+1，2^m-1 は互いに素であるから，

$$(2^m+1,\ 2^m-1)=(9,\ 2m+1),\ (2m+1,\ 9)$$

を得る．ここで，$2^m-1=9$ となる自然数 m は存在しない．一方，$2^m+1=9$ のとき，$m=3$ である.

このとき，$p=2\cdot3+1=7$ であり，題意を満たす.

ゆえに，求める p, q の組は，

$$\boldsymbol{(p,\ q)=(7,\ 3)}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

◇ ♡

解説

（1）は，合同式を用いて示すこともできます.

別解

（1）**【証明】**

n は偶数なので，$n=2k$（k は自然数）とおける．よって，

$$\begin{aligned}2^n-1&=2^{2k}-1\\&=4^k-1\\&=(3+1)^k-1\\&\equiv 1^k-1 \pmod 3\\&=0\end{aligned}$$

である．ゆえに，2^n-1 は 3 の倍数であることが示された. **(証明終)**

（2）は，互いに素であることを示すため，最大公約数を設定して，それが 1 であることを示します.

（3）は，(1), (2) の結果を利用します．まずは，p, q が 3 以上の素数であることを示します．$2^{p-1}-1=pq^2$ は，$2^{p-1}-1$ を素因数分解すると pq^2 となることを述べています．つまり，$2^{p-1}-1$ が 3 の倍数であることを述べれば，p, q のいずれかが 3 であることがわかります．あとは，$p-1$ が偶数であることから，(2) の結果を用いて p, q の値を求めます.

微分可能な関数 $f(x)$ は，2 つの条件 $f'(x)=xe^x$，$f(1)=0$ を満たしている．このとき，次の問いに答えよ．

（1） 関数 $f(x)$ を求めよ．

（2） すべての x に対して次の等式を満たす関数 $g(x)$ を求めよ．

$$g(x)=f(x)+\frac{(2-x)e^x}{e-1}\int_0^1 g(t)\,dt$$

（3） $g(x)$ を (2) で求めた関数とし，k を定数とする．x についての方程式 $g(x)=kx$ の異なる実数解の個数を調べよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty$ を用いてよい．

微分可能な関数 $f(x)$ は，2 つの条件 $f'(x)=xe^x$, $f(1)=0$ を満たしている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) すべての x に対して次の等式を満たす関数 $g(x)$ を求めよ．

$$g(x)=f(x)+\frac{(2-x)e^x}{e-1}\int_0^1 g(t)\,dt$$

(3) $g(x)$ を (2) で求めた関数とし，k を定数とする．x についての方程式 $g(x)=kx$ の異なる実数解の個数を調べよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty$ を用いてよい．

【テーマ】：軌跡と面積

方針

(1) は，不定積分をすれば求められます．(2) は，$\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt$ が定数であることから A とおいて，A の値を求めます．(3) は，$\dfrac{g(x)}{x}=k$ として，$h(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ とおき，そのグラフを考えます．

♣ ♠

解答

(1) $f(x)=\displaystyle\int xe^x\,dx$ であるから，

$$f(x)=xe^x-\int e^x\,dx=(x-1)e^x+C \quad (C\text{ は積分定数})$$

となる．$f(1)=0$ より $C=0$ を得る．したがって，

$$f(x)=\boldsymbol{(x-1)e^x}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt=A$ とおくと，

$$\begin{aligned}
g(x)&=(x-1)e^x+\frac{(2-x)e^x}{e-1}A\\
&=\left(x-1+\frac{A(2-x)}{e-1}\right)e^x\\
&=\left\{\left(1-\frac{A}{e-1}\right)x+\frac{2A}{e-1}-1\right\}e^x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad A&=\int_0^1\left\{\left(1-\frac{A}{e-1}\right)te^t+\left(\frac{2A}{e-1}-1\right)e^t\right\}dt\\
&=\left(1-\frac{A}{e-1}\right)\Big[(t-1)e^t\Big]_0^1+\left(\frac{2A}{e-1}-1\right)\Big[e^t\Big]_0^1 \quad\cdots\cdots Ⓐ\quad(\because\ (1))\\
&=\left(1-\frac{A}{e-1}\right)+\left(\frac{2A}{e-1}-1\right)(e-1)
\end{aligned}$$

これを A について解くと，$A=e-1$ を得るので，

$$\begin{aligned}
g(x)&=(x-1)e^x+(2-x)e^x\\
&=\boldsymbol{e^x}\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

(3) $x=0$ は方程式 $g(x)=kx$ の解ではないので，$x \fallingdotseq 0$ として，

$$e^x=kx \iff \frac{e^x}{x}=k$$

である．$h(x)=\dfrac{e^x}{x}$ とおくと，$g(x)=kx$ の異なる実数解の個数は，$h(x)=k$ の実数解の個数と一致する．すなわち $y=h(x)$ と $y=k$ のグラフの交点の個数と一致する．

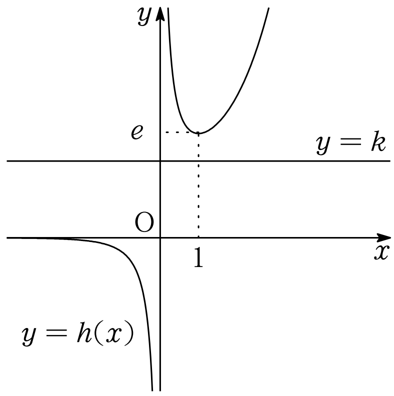
$$h'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

$h'(x)=0$ のとき，$x=1$ であるから，増減表は次のようになる．

x	$(-\infty)$	$\cdots$	0		$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$h'(x)$		$-$			$-$	0	$+$	
$h(x)$	(0)	↘	$(-\infty)$	(∞)	↘	e	↗	(∞)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty,$$

$$\lim_{x\to-0}\frac{e^x}{x}=-\infty,\quad \lim_{x\to+0}\frac{e^x}{x}=\infty$$



ゆえに，グラフは右図のようになる．

よって，求める実数解の個数は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{k>e} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{k=e,\ k<0} \text{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{0 \leqq k<e} \text{ のとき} & \textbf{0 個} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

微分積分の総合問題です．前半は，不定積分から関数 $f(x)$ を定め，積分方程式を解くことで $g(x)$ を求めます．

(2) は，積分方程式なので，$\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt$ が定数であることに着目してこの値を A とおき，A についての方程式を解きます．その際，Ⓐ の部分の計算は，$\displaystyle\int te^t\,dx$ を (1) で計算しているので，その結果を用いれば，2 度も部分積分法をする必要がありません．

(3) は，グラフを用いて実数解の個数を求める頻出問題です．関数 $h(x)=\dfrac{e^x}{x}$ のグラフを考えますが，グラフを用いて求める場合は，必ず $x\to\pm\infty$ を調べる必要があります．また，$h(x)=\dfrac{e^x}{x}$ は $x=0$ で定義できない関数ですから，$x\to\pm0$ も調べる必要があります．これは，単調増加だけでは $x\to\infty$ のときの関数の極限がわからないからです．例えば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}h(x)=e^2$ か $\displaystyle\lim_{x\to\infty}h(x)=\infty$ かで，答えが変わってきますよね．だから，$x\to\infty$ を調べる必要があるのです．

0 と書いたカードが 1 枚，1 と書いたカードが 3 枚，2 と書いたカードが 3 枚，計 7 枚のカードが袋に入っている．このとき，A 君と B 君が次のルールにしたがい，袋から 1 枚ずつカードを引くゲームをする．ただし，引いたカードは袋には戻さないとし，袋の中のカードがなくなればゲームは終了する．

(ア) 最初に A 君がカードを引く．

(イ) 0 以外のカードを引いた場合は，次のカードを相手が引く．

(ウ) 0 のカードを引いた場合は，次のカードを自分が引く．

A 君と B 君のそれぞれの得点は，0 のカードを引かなかった場合は，引いたカードに書いてある数字の合計とする．0 のカードを引いた場合は，0 のカードを引くまでに引いたカードに書いてある数字の合計とする．A 君の得点を X, B 君の得点を Y とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $X=1$ となる確率を求めよ．

(2) $X=2$ となる確率を求めよ．

(3) $Y=5$ となる確率を求めよ．

0 と書いたカードが 1 枚，1 と書いたカードが 3 枚，2 と書いたカードが 3 枚，計 7 枚のカードが袋に入っている．このとき，A 君と B 君が次のルールにしたがい，袋から 1 枚ずつカードを引くゲームをする．ただし，引いたカードは袋には戻さないとし，袋の中のカードがなくなればゲームは終了する．

(ア) 最初に A 君がカードを引く．

(イ) 0 以外のカードを引いた場合は，次のカードを相手が引く．

(ウ) 0 のカードを引いた場合は，次のカードを自分が引く．

A 君と B 君のそれぞれの得点は，0 のカードを引かなかった場合は，引いたカードに書いてある数字の合計とする．0 のカードを引いた場合は，0 のカードを引くまでに引いたカードに書いてある数字の合計とする．A 君の得点を X, B 君の得点を Y とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $X=1$ となる確率を求めよ．

(2) $X=2$ となる確率を求めよ．

(3) $Y=5$ となる確率を求めよ．

【テーマ】：確率の基本性質

方針

どのタイミングで 0 のカードを引くかがポイントです．(3) では，0 のカードを引く人が 4 枚のカードを引き，0 のカードを引かない人が 3 枚のカードを引くことに着目します．

♣ ♠

解答

0, 1, 2 のカードをそれぞれ $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ で表すこととする．

(1) $X=1$ となるのは，A が $\boxed{1}$ を引いて，次に B が $\boxed{1}$ または $\boxed{2}$ を引き，3 回目に A が $\boxed{0}$ を引けばよい．よって，求める確率は，

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}=\boldsymbol{\frac{1}{14}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $X=2$ となるのは，次のようにカードを引く場合である．

1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	5 回目		
A	B	A	B	A		
$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{0}$	→	$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{140}$
$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	→	$\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{140}$
$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{0}$	→	$\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{70}$
$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$			→	$\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{70}$
$\boxed{2}$	$\boxed{2}$	$\boxed{0}$			→	$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{70}$

ゆえに，求める確率は，

$$\frac{1}{140}+\frac{1}{140}+\frac{1}{70}+\frac{3}{70}+\frac{2}{70}=\boldsymbol{\frac{1}{10}}\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $\boxed{0}$ を引いた人は，ゲーム終了までにカードを 4 枚引き，$\boxed{0}$ を引かなかった人は，ゲーム終了までにカードを 3 枚引く．B が $\boxed{0}$ を引くとき，B が $\boxed{0}$ を引く可能性があるのは 2 回目，4 回目，6 回目である．それぞれにおいて，Y の最大値は，0, 2, 4 であり，$Y=5$ となることはない．よって，$Y=5$ となるのは，B が $\boxed{1}$ を 1 回，$\boxed{2}$ を 2 回引くときだけである．7 回の試行でのカードの取り出し方は，7 枚のカードをすべて区別すると 7! 通りある．B のカードの取り出し方は，取り出す順序を考慮して，

$${}_3C_2 \cdot {}_3C_1 \cdot 3! = 54\ (\text{通り})$$

A のカードの取り出し方は，残り 4 枚であるから，順序を考慮して，

$$4! = 24\ (\text{通り})$$

ゆえに，求める確率は，

$$\frac{54 \cdot 24}{7!} = \boldsymbol{\frac{9}{35}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

(1), (2) の解答では，$\boxed{0}$ を引いた後は，A の得点に影響が出ないため，それ以降のことは考えずに計算をしましたが，7 枚のカードすべてを引いてゲームが終了するまでを考えると次のようになります．

(1) は，1 回目に A が $\boxed{1}$，2 回目に B が $\boxed{0}$ 以外，3 回目に A が $\boxed{0}$ を引くときである．4 回目以降は，2 人がどのカードを引いても A の得点に影響はない．したがって，

$$\frac{3 \cdot 1 \cdot 5!}{7!} = \frac{1}{14}$$

(2) は，次の 2 通りが考えられる．

(i) 1 回目に A が 2，3 回目に A が 0 を引く．

(ii) 1 回目に A が 1，3 回目に A が 1，5 回目に 0 のカードを引く．

ゆえに，(1) と同様に考えて，

$$\frac{3 \cdot 1 \cdot 5! + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!}{7!} = \frac{1}{10}$$

(3) は，$\boxed{0}$ を引く人が 4 枚のカードを引き，$\boxed{0}$ を引かない人が 3 枚のカードを引きます．つまり，B が $\boxed{0}$ のカードを引くと $Y=5$ とならないことをまず述べておきます．A は，どのタイミングで $\boxed{0}$ を引いても構いません．注意したいのは，同じ数字のカードでもすべて区別して並べなければいけないため，A が 4 枚のカードを引くとき，$\boxed{0}$，$\boxed{1}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$ を並べますが，区別をして考えるので，並べ方は 4! とします．$\dfrac{4!}{2!}$ としないようにしましょう．

座標平面上で，$y=3-\log_2(3-x)\ (x<3)$，$y=3-x$ および $y=9-3x$ で囲まれた領域を S とする．以下の問いに答えよ．

（1） S を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

（2） 座標平面において，S を原点のまわりに 1 回転したときに S が通過する領域を T とし，T を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を V とする．T を座標平面上に図示し，V の体積を求めよ．

座標平面上で，$y=3-\log_2(3-x)\ (x<3)$，$y=3-x$ および $y=9-3x$ で囲まれた領域を S とする．以下の問いに答えよ．

(1)　S を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(2)　座標平面において，S を原点のまわりに 1 回転したときに S が通過する領域を T とし，T を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を V とする．T を座標平面上に図示し，V の体積を求めよ．

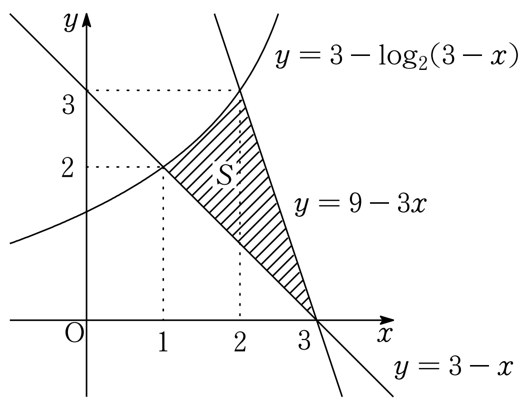
【テーマ】：回転体の体積

方針

(1) は，領域 S を図示して回転体の体積を考えます．(2) は，回転軸（ここでは原点）からの距離が一番近い点と遠い点に着目します．

♣　♠

解答



(1)　$y=3-\log_2(3-x)$ と $y=3-x$ の交点は，$(1,\ 2)$ であり，$y=3-\log_2(3-x)$ と $y=9-3x$ の交点は，$(2,\ 3)$ である．

よって，求める立体の体積を W_1 とすると，

$$W_1=\int_1^2 \pi\{3-\log_2(3-x)\}^2\,dx+\int_2^3 \pi(9-3x)^2\,dx-\int_1^3 \pi(3-x)^2\,dx$$

ここで，3 つの定積分において $3-x=t$ とおくと，$-dx=dt$ であり，それぞれの積分区間は，

x	$1\ \to\ 2$
t	$2\ \to\ 1$

x	$2\ \to\ 3$
t	$1\ \to\ 0$

x	$1\ \to\ 3$
t	$2\ \to\ 0$

である．したがって，

$$\begin{aligned}W_1&=\pi\int_2^1 (3-\log_2 t)^2\,(-dt)+\pi\int_1^0 9t^2\,(-dt)-\pi\int_2^0 t^2\,(-dt)\\&=\pi\int_1^2\{9-6\log_2 t+(\log_2 t)^2\}\,dt+\pi\int_0^1 9t^2\,dt-\pi\int_0^2 t^2\,dt\\&=\pi\int_1^2\left\{9-6\frac{\log t}{\log 2}+\left(\frac{\log t}{\log 2}\right)^2\right\}dt+\pi\int_0^1 9t^2\,dt-\pi\int_0^2 t^2\,dt\end{aligned}$$

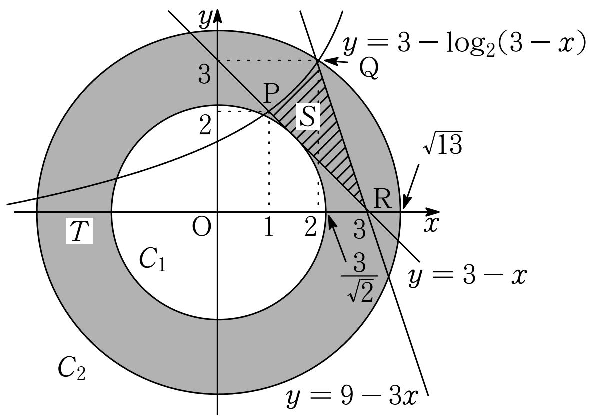
ここで，$\displaystyle\int \log t\,dt=t\log t-t+C_1$（$C_1$ は積分定数）であり，

$$\begin{aligned}\int(\log t)^2\,dt&=t(\log t)^2-\int t\cdot 2\log t\cdot\frac{1}{t}\,dt\\&=t(\log t)^2-2\int\log t\,dt\\&=t(\log t)^2-2(t\log t-t)+C_2\ （C_2\ は積分定数）\end{aligned}$$

であるから，

$$W_1=\pi\left[\,9t-\frac{6}{\log 2}(t\log t-t)+\frac{t(\log t)^2-2t\log t+2t}{(\log 2)^2}\,\right]_1^2+\pi\left[\,3t^3\,\right]_0^1-\pi\left[\,\frac{1}{3}t^3\,\right]_0^2$$
$$=\pi\left\{9(2-1)-\frac{6}{\log 2}\{2\log 2-2-(0-1)\}+\frac{\{2(\log 2)^2-4\log 2+4\}-(0-0+2)}{(\log 2)^2}\right\}$$
$$+3\pi(1-0)-\frac{\pi}{3}(8-0)$$
$$=\pi\left\{9-12+\frac{6}{\log 2}+\frac{2(\log 2)^2-4\log 2+2}{(\log 2)^2}+3-\frac{8}{3}\right\}$$
$$=\pi\left\{-3+\frac{6}{\log 2}+2-\frac{4}{\log 2}+\frac{2}{(\log 2)^2}+\frac{1}{3}\right\}$$
$$=\left\{\boldsymbol{\frac{2}{(\log 2)^2}+\frac{2}{\log 2}-\frac{2}{3}}\right\}\boldsymbol{\pi}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　P(1, 2), Q(2, 3), R(3, 0) とすると，原点からの距離が最も遠いのは点 Q であり，最も近いのは直線 PR へ原点から垂線を引いたときの交点である．



原点と直線 PR の距離を d_1 とすると，

$$d_1=\frac{|3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

原点と点 Q の距離を d_2 とすると，

$$d_2=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$$

ゆえに，半径 d_1, d_2 の円をそれぞれ C_1, C_2 とすると，S が通過する領域 T は，円 C_1, C_2 によって囲まれた部分になる．ゆえに，右図網点部分である．

なお，C_1, C_2 の方程式は，次のようになる．

$$\begin{cases} C_1 \;:\; x^2+y^2=\dfrac{9}{2} \\ C_2 \;:\; x^2+y^2=13 \end{cases}$$

この領域 T を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体が V となるので，その体積を W_2 とすると，

$$W_2=2\int_0^{\sqrt{13}}\pi(13-x^2)\,dx+2\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}\pi\left(\frac{9}{2}-x^2\right)dx$$
$$=2\pi\left[\,13x-\frac{1}{3}x^3\,\right]_0^{\sqrt{13}}+2\pi\left[\,\frac{9}{2}x-\frac{1}{3}x^3\,\right]_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}$$
$$=2\pi\left(13\sqrt{13}-\frac{13\sqrt{13}}{3}\right)+2\pi\left(\frac{27}{2\sqrt{2}}-\frac{9}{2\sqrt{2}}\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{52\sqrt{13}-27\sqrt{2}}{3}\pi}\cdots\cdots(\text{答})$$

◇　　♡

解説

(1) は，領域 S が図示できれば基本的な積分計算です．ただし，対数の底が 2 になっているので，底の変換公式で底を e にするほうが計算ミスが減らせるでしょう．

(2) は，まず領域 T を図示するわけですが，これは領域 S 内の点において，回転軸（ここでは原点）からの距離を考えます．なぜなら，回転させれば必ず円ができるので，最も原点から通い点と最も近い点だけを回転させればその他の点は，必ずこれらの軌跡の間にあることがわかるからです．領域全体をまわそうと考えると難しくなります．

なお，最後の V の体積は，解答では円を回転させるという方法を取りましたが，円を回転させると球になるので，球の体積を用いて，

$$W_2=\frac{4}{3}\pi(\sqrt{13})^3-\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^3=\frac{52\sqrt{13}-27\sqrt{2}}{3}\pi$$

とすれば，簡単に求められます．

平面上に長さ 2 の線分 AB を直径とする円 C がある．2 点 A, B を除く C 上の点 P に対し，AP $=$ AQ となるように線分 AB 上の点 Q をとる．また，直線 PQ と円 C の交点のうち，P でない方を R とする．このとき，以下の問いに答えよ．

（1） $\triangle$AQR の面積を $\theta = \angle$PAB を用いて表せ．

（2） 点 P を動かして $\triangle$AQR の面積が最大になるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を用いて表せ．

平面上に長さ 2 の線分 AB を直径とする円 C がある．2 点 A, B を除く C 上の点 P に対し，AP $=$ AQ となるように線分 AB 上の点 Q をとる．また，直線 PQ と円 C の交点のうち，P でない方を R とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\triangle$AQR の面積を $\theta = \angle$PAB を用いて表せ．

(2) 点 P を動かして $\triangle$AQR の面積が最大になるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を用いて表せ．

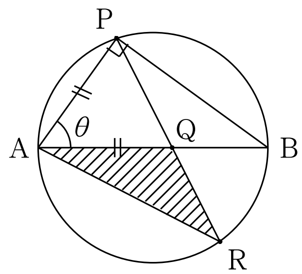
【テーマ】：三角関数とベクトル

方針

(1) は，平面図形の知識と三角関数を用いて三角形の面積を求めます．(2) は，θ の値が求められるので，それを用いて辺比を求めてベクトル表記をします．円の中心を設定すると計算量が減らせて楽になります．

♣ ♠

解答



(1) $\angle \mathrm{APB} = \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\mathrm{AP} = \mathrm{AB}\cos\theta = 2\cos\theta$ である．

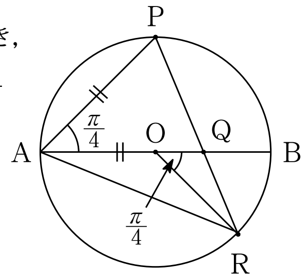
また，$\angle \mathrm{APQ} = \dfrac{\pi - \theta}{2}$ より，

$$\angle \mathrm{QPB} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2}$$

であるから，$\overset{\frown}{\mathrm{BR}}$ に対する円周角が等しいことより，$\angle \mathrm{BAR} = \dfrac{\theta}{2}$ である．

また，$\angle \mathrm{ARB} = \dfrac{\pi}{2}$ であることから，$\mathrm{AR} = \mathrm{AB}\cos\dfrac{\theta}{2} = 2\cos\dfrac{\theta}{2}$ となるので，

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{AQR} &= \frac{1}{2}\cdot \mathrm{AQ}\cdot \mathrm{AR}\cdot \sin\frac{\theta}{2}\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\cos\theta\cdot 2\cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\\ &= \boldsymbol{\cos\theta\sin\theta}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$



(2) (1) より，$\triangle \mathrm{AQR} = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta$ であるから，$2\theta = \dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，$\triangle$AQR の面積は最大となる．このとき，円の中心を O とすると，$\angle \mathrm{BOR} = \dfrac{\pi}{4}$ であるから，BP // OR となる．さらに，OR $= 1$, BP $= \sqrt{2}$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{PB}}$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AR}} &= \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{PB}}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}}\right) = \boldsymbol{\frac{1+\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

♢ ♡

解説

解答だけ見るとあっさり解けそうだが，図形的な要素が濃い問題なので，意外と難しく感じる問題でしょう．特に，(2) は，円の中心を設定しないと多くの計算を強いられるため大変です．もちろん円の中心を設定しなくても解くことはできます．その際は，AQ : QB $= \sqrt{2} : 2$ となることと，PQ : QR を求めなければならないため，結構計算量が多くなり大変です．ちなみに PQ : QR $= \sqrt{2} : 1$ となります．

$f(x)=\displaystyle\int_{x}^{x+\frac{\pi}{3}}|\sin\theta|\,d\theta$ とおく．

(1)　$f'(x)$ を求めよ．

(2)　$0 \leqq x \leqq \pi$ における $f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x を求めよ．

$f(x)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{3}}|\sin\theta|\,d\theta$ とおく.

(1) $f'(x)$ を求めよ.

(2) $0\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x を求めよ.

【テーマ】：絶対値を含む定積分

方針

(1) は，微分積分学の基本定理を用います．(2) は，(1) で求めた $f'(x)$ を用いて増減表をかきますが，絶対値があるため場合分けが必要になります.

解答

(1) 微分積分学の基本定理より，

$$f'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|-|\sin x|\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $0\leqq x\leqq\pi$ のとき，$\frac{\pi}{3}\leqq x+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{4}{3}\pi$ であるから，

(i) $\frac{\pi}{3}\leqq x+\frac{\pi}{3}\leqq\pi$ すなわち $0\leqq x\leqq\frac{2}{3}\pi$ のとき，$f'(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin x$

(ii) $\pi\leqq x+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{4}{3}\pi$ すなわち $\frac{2}{3}\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき，$f'(x)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin x$

(i) において，$f'(x)=0$ のとき，$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin x$ であるから，

$$\pi-x=x+\frac{\pi}{3}\iff x=\frac{\pi}{3}$$

(ii) において，$f'(x)=0$ のとき，$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin x$ であるから，

$$2\pi-x=x+\frac{\pi}{3}\iff x=\frac{5}{6}\pi$$

よって，増減表は次のようになる.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$2-\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

$$f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\,d\theta=\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}\sin\theta\,d\theta=\Big[-\cos\theta\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}=1$$

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\sin\theta\,d\theta=\Big[-\cos\theta\Big]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}=\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{7}{6}\pi}\sin\theta\,d\theta=\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi}\sin\theta\,d\theta+\int_{\pi}^{\frac{7}{6}\pi}(-\sin\theta)\,d\theta$$

$$=\Big[-\cos\theta\Big]_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi}+\Big[+\cos\theta\Big]_{\pi}^{\frac{7}{6}\pi}=2-\sqrt{3}$$

$$f(\pi)=\int_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi}(-\sin\theta)\,d\theta=\Big[\cos\theta\Big]_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi}=\frac{1}{2}$$

ゆえに，$f(x)$ の最大値と最小値は，

$$\begin{cases}\textbf{最大値：}\ \ \boldsymbol{1} & \left(\boldsymbol{x=\frac{\pi}{3}}\right) \\ \textbf{最小値：}\ \ \boldsymbol{2-\sqrt{3}} & \left(\boldsymbol{x=\frac{5}{6}\pi}\right)\end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

(1) は，次の微分積分学の基本定理を用います．頻出ですから必ず使えるようにしましょう．本問では，(ii) を用いています．

公式 **【微分積分学の基本定理】**

a を定数，x は t に無関係な変数，$g(x)$, $h(x)$ は連続で微分可能な関数とする．

(i) $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)\,dt = f(x)$

(ii) $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$

(2) は，絶対値を外さなければ積分ができないため，x による場合分けが必要になります．なお，$f'(x)=0$ を解く際は x の値の範囲に注意をして解きましょう．三角関数において，

$$\sin(\pi-x)=\sin x,\quad \sin(2\pi-x)=-\sin x$$

が成り立つことを用いて解いています．

数直線上の点 P を次の規則で移動させる．一枚の硬貨を投げて，表が出れば P を $+1$ だけ移動させ，裏が出れば P を原点に関して対称な点に移動させる．P は初め原点にあるとし，硬貨を n 回投げた後の P の座標を a_n とする．

（1） $a_3 = 0$ となる確率を求めよ．

（2） $a_4 = 1$ となる確率を求めよ．

（3） $n \geqq 3$ のとき，$a_n = n - 3$ となる確率を n を用いて表せ．

数直線上の点 P を次の規則で移動させる．一枚の硬貨を投げて，表が出れば P を $+1$ だけ移動させ，裏が出れば P を原点に関して対称な点に移動させる．P は初め原点にあるとし，硬貨を n 回投げた後の P の座標を a_n とする．

(1)　$a_3=0$ となる確率を求めよ．

(2)　$a_4=1$ となる確率を求めよ．

(3)　$n\geqq 3$ のとき，$a_n=n-3$ となる確率を n を用いて表せ．

【テーマ】：確率と漸化式

方針

(1), (2) は，具体的な状況を考えても求められますが，(3) は，漸化式を立てて考えると求め易くなります．

♣ ♠

解答

(1)　$a_3=0$ となるのは，

(i)　表裏表の順に出る場合．

(ii)　裏裏裏の順に出る場合．

のいずれかであるから，求める確率を p とすると，

$$p=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{1}{4}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$a_4=1$ となるのは，

(i)　$a_3=0$ かつ 4 回目が表の場合．

(ii)　$a_3=-1$ かつ 4 回目が裏の場合．

のいずれかである．$a_3=-1$ となるのは，裏表裏と出るときであるから，その確率は，$\left(\frac{1}{2}\right)^3$ である．
よって，求める確率を q とすると，

$$q=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{3}{16}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　$n\geqq 3$ のとき，$a_n=n-3$ となる確率を r_n とする．$a_n=n-3$ となるのは，

(i)　$a_{n-1}=n-4$ かつ n 回目が表の場合．

(ii)　$a_{n-1}=-(n-3)$ かつ n 回目が裏の場合．

のいずれかである．$a_{n-1}=n-4$ となる確率は，r_{n-1} である．また，$a_{n-1}=-(n-3)$ となるのは，1 回目に裏が出て 2 回目から $n-2$ 回目までがすべて表であり，$n-1$ 回目で裏が出るとき，すなわち

$$0\xrightarrow{\text{裏}}0\underbrace{\xrightarrow{\text{表}}1\xrightarrow{\text{表}}2\xrightarrow{\text{表}}\cdots\cdots\xrightarrow{\text{表}}}_{n-3\text{ 回}}(n-3)\xrightarrow{\text{裏}}-(n-3)$$

となる場合であるから，その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ である．

ゆえに，$n \geqq 3$ のとき，

$$r_n = \frac{1}{2}r_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} \iff r_n = \frac{1}{2}r_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

が成り立つ．両辺に 2^n をかけて，

$$2^n r_n = 2^{n-1}r_{n-1} + 1 \quad (n \geqq 3)$$

より，数列 $\{2^n r_n\}$ は，初項 $2^3 r_3$，公差 1 の等差数列である．r_3 は $a_3 = 0$ となる確率であるから，(1) より $r_3 = \dfrac{1}{4}$ である．ゆえに，

$$2^n r_n = 8r_3 + (n-3)\cdot 1 = 8\cdot\frac{1}{4} + n - 3 = n - 1$$

$$\therefore \quad r_n = \boldsymbol{\frac{n-1}{2^n}} \cdots\cdots (\text{答})$$

◇ ♡

解説

(1), (2) は，考えられる状況をもれなく挙げれば求められますが，(3) は規則的な動きをするものなので漸化式が有効です．漸化式を立てることができなくても，n 回移動して $n-3$ に到着しなければならないので，裏は最大 3 回までしか出せないことに気付けば，漸化式を用いず直接考えることもできます．

別解

初めて表が出るのが k 回目であるとすると，$a_n = n-3$ であるから，$k \leqq 4$ である．このとき，k の値によって場合分けを行う．

(i) $k=1$ のとき，P の座標の変化は，

$$0 \to 1 \xrightarrow{裏} -1 \xrightarrow{裏} 0 \to 1 \to 2 \to \cdots\cdots \to n-3$$

(ii) $k=2$ のとき，P の座標の変化は，3 回目以降どのタイミングで裏が出るかで，次の $n-3$ 通りがある．

$$0 \xrightarrow{裏} 0 \to 1 \xrightarrow{裏} -1 \xrightarrow{裏} 1 \to 2 \to \cdots\cdots \to n-3$$
$$0 \xrightarrow{裏} 0 \to 1 \to 2 \xrightarrow{裏} -2 \xrightarrow{裏} 2 \to \cdots\cdots \to n-3$$
$$\vdots$$
$$0 \xrightarrow{裏} 0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to \cdots\cdots \to (n-3) \xrightarrow{裏} -(n-3) \xrightarrow{裏} n-3$$

(iii) $k=3$ のとき，$a_n = n-3$ となることはない．

(iv) $k=4$ のとき，P の座標の変化は，

$$0 \xrightarrow{裏} 0 \xrightarrow{裏} 0 \xrightarrow{裏} 0 \to 1 \to 2 \to \cdots\cdots \to n-3$$

よって，(i)〜(iv) より全部で $n-1$ 通りあるから，求める確率 r_n は，

$$r_n = (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \boldsymbol{\frac{n-1}{2^n}} \cdots\cdots (\text{答})$$

u を実数とする．座標平面上の 2 つの放物線

$$C_1:\quad y=-x^2+1$$

$$C_2:\quad y=(x-u)^2+u$$

を考える．C_1 と C_2 が共有点をもつような u の値の範囲は，ある実数 $a,\,b$ により，$a \leqq u \leqq b$ と表される．

(1) $a,\,b$ の値を求めよ．

(2) u が $a \leqq u \leqq b$ をみたすとき，C_1 と C_2 の共有点を $\mathrm{P}_1(x_1,\,y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\,y_2)$ とする．ただし，共有点が 1 点のみのときは，P_1 と P_2 は一致し，ともにその共有点を表すとする．$2\left|x_1y_2-x_2y_1\right|$ を u の式で表せ．

(3) (2) で得られる u の式を $f(u)$ とする．定積分 $I=\displaystyle\int_a^b f(u)\,du$ を求めよ．

u を実数とする．座標平面上の 2 つの放物線

$$C_1: \quad y=-x^2+1$$
$$C_2: \quad y=(x-u)^2+u$$

を考える．C_1 と C_2 が共有点をもつような u の値の範囲は，ある実数 $a,\ b$ により，$a \leqq u \leqq b$ と表される．

（1） $a,\ b$ の値を求めよ．

（2） u が $a \leqq u \leqq b$ をみたすとき，C_1 と C_2 の共有点を $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ とする．ただし，共有点が 1 点のみのときは，P_1 と P_2 は一致し，ともにその共有点を表すとする．$2\left|x_1y_2-x_2y_1\right|$ を u の式で表せ．

（3） （2）で得られる u の式を $f(u)$ とする．定積分 $I=\displaystyle\int_a^b f(u)\,du$ を求めよ．

【テーマ】：2 次方程式と定積分

方針

（1）は，判別式で求められ，（2）は対称式の計算を行います．（3）は置換積分を行いますが，ポイントは根号内を式変形して，$\sqrt{a^2-x^2}$ の形であることを見抜くことです．

解答

（1） 2 曲線が共有点をもつとき，2 次方程式

$$-x^2+1=(x-u)^2+u \iff 2x^2-2ux+u^2+u-1=0 \cdots\cdots ①$$

が実数解をもつので，判別式を D とすると，$D \geqq 0$ である．よって，

$$D/4=(-u)^2-2(u^2+u-1) \geqq 0 \iff u^2+2u-2 \leqq 0 \cdots\cdots ②$$

$u^2+2u-2=0$ の解は，$u=-1\pm\sqrt{3}$ であるから，② を満たす u の値の範囲は，

$$-1-\sqrt{3} \leqq u \leqq -1+\sqrt{3}$$

となる．ゆえに，$\boldsymbol{a=-1-\sqrt{3},\ b=-1+\sqrt{3}}$……**（答）**

（2） 2 点 $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2$ はともに C_1 上の点であるから，$y_1=-{x_1}^2+1$，$y_2=-{x_2}^2+1$ である．よって，

$$\begin{aligned}2\left|x_1y_2-x_2y_1\right| &= 2\left|x_1(-{x_2}^2+1)-x_2(-{x_1}^2+1)\right| \\ &= 2\left|-x_1{x_2}^2+x_1+x_2{x_1}^2-x_2\right| \\ &= 2\left|(x_1x_2+1)(x_1-x_2)\right|\end{aligned}$$

一方，$x_1,\ x_2$ は ① の 2 解であるから，解と係数の関係より，

$$x_1+x_2=u, \quad x_1x_2=\frac{u^2+u-1}{2}$$

である．よって，

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=u^2-4\cdot\frac{u^2+u-1}{2}=-u^2-2u+2$$

であり，これは ② より $a \leqq u \leqq b$ の範囲で常に 0 以上の値をとるので，

$$\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{-u^2-2u+2}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}2\left|(x_1x_2+1)(x_1-x_2)\right| &= 2\left|\frac{u^2+u-1}{2}+1\right|\sqrt{-u^2-2u+2}\\ &= 2\left|\frac{u^2+u+1}{2}\right|\sqrt{-u^2-2u+2}\\ &= \boldsymbol{(u^2+u+1)\sqrt{-u^2-2u+2}}\cdots\cdots\text{(答)}\quad (\because\ \ u^2+u+1>0)\end{aligned}$$

(3)　(2) より，$f(u)=(u^2+u+1)\sqrt{-u^2-2u+2}$ であるから，

$$\begin{aligned}I &= \int_{-1-\sqrt{3}}^{-1+\sqrt{3}}(u^2+u+1)\sqrt{-u^2-2u+2}\,du\\ &= \int_{-1-\sqrt{3}}^{-1+\sqrt{3}}(u^2+u+1)\sqrt{3-(u+1)^2}\,du\end{aligned}$$

ここで，$\sqrt{3}\sin\theta=u+1$ とおくと，$\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta=du$ であり，
u と t の対応関係は，右のようになる．

u	$-1-\sqrt{3}$	→	$-1+\sqrt{3}$
θ	$-\frac{\pi}{2}$	→	$\frac{\pi}{2}$

ゆえに，求める定積分の値は，

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{(\sqrt{3}\sin\theta-1)^2+\sqrt{3}\sin\theta\}\sqrt{3(1-\sin^2\theta)}\cdot\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta+1)\cdot 3\cdot\cos^2\theta\,d\theta\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(9\sin^2\theta\cos^2\theta-3\sqrt{3}\sin\theta\cos^2\theta+3\cos^2\theta)\,d\theta\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{9}{4}\sin^2 2\theta-3\sqrt{3}\sin\theta\cos^2\theta+3\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{9}{4}\cdot\frac{1-\cos 4\theta}{2}-3\sqrt{3}\sin\theta\cos^2\theta+3\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta\\ &= \left[\frac{9}{4}\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{8}\sin 4\theta\right)-3\sqrt{3}\left(-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)+3\left(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}+3\cdot\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\boldsymbol{\frac{21}{8}\pi}\cdots\cdots\text{(答)}\end{aligned}$$

◇　　　♡

解説

(1) は，2 次方程式の実数解の個数という基本的な問題なので判別式で処理ができます．(2) は，x_1, x_2 についての対称式であることに気がつけば基本的な問題です．ここまでは，完答できるようにしたい問題です．(3) は，定積分の問題ですが，どのように置換すれば計算ができるようになるかがポイントです．本問の場合，根号内を平方完成すれば $\sqrt{a^2-x^2}$ の形にできるので，$x=a\sin\theta$ という置換ができることがわかります．あとは，定積分を計算するだけなので，計算力があれば完答が目指せるでしょう．ちなみに，$\sin\theta\cos^2\theta$ は奇関数なので，

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta=0$$

を用いれば，記述量を減らすことができます．本解答では，この積分計算を見せるためあえて残しています．

n を自然数とし，p_n, q_n を実数とする．ただし，p_1, q_1 は ${p_1}^2-4q_1=4$ を満たすとする．2 次方程式 $x^2-p_nx+q_n=0$ は異なる実数解 α_n, β_n をもつとする．ただし，$\alpha_n<\beta_n$ とする．$c_n=\beta_n-\alpha_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ は

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1)　$r_n=\log_2(n\sqrt{n}+\sqrt{n})$ とするとき，$\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ を r_n, r_{n+1} を用いて表せ．

(2)　c_n を n の式で表せ．

(3)　$p_n=n\sqrt{n}$ であるとき，q_n を n の式で表せ．

n を自然数とし，p_n, q_n を実数とする．ただし，p_1, q_1 は ${p_1}^2-4q_1=4$ を満たすとする．2 次方程式 $x^2-p_nx+q_n=0$ は異なる実数解 α_n, β_n をもつとする．ただし，$\alpha_n<\beta_n$ とする．$c_n=\beta_n-\alpha_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ は

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1)　$r_n=\log_2(n\sqrt{n}+\sqrt{n})$ とするとき，$\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ を r_n, r_{n+1} を用いて表せ．

(2)　c_n を n の式で表せ．

(3)　$p_n=n\sqrt{n}$ であるとき，q_n を n の式で表せ．

【テーマ】：隣接２項間漸化式

方針

(1) は，底が 2 の対数をとります．(2) は，(1) の結果を使って，$\dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ を計算し，数列 $\{c_n\}$ の漸化式を作ります．(3) は，2 次方程式の解の差を求めることで，c_n を p_n と q_n で表します．

♣ ♠

解答

(1)
$$\begin{aligned}\log_2\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}&=\log_2\frac{(n+2)\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}(n+1)}\\&=\log_2(n+2)\sqrt{n+1}-\log_2\sqrt{n}(n+1)\\&=\log_2\{(n+1)\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}\}-\log_2(n\sqrt{n}+\sqrt{n})\\&=r_{n+1}-r_n\end{aligned}$$

よって，

$$\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}=\boldsymbol{2^{(r_{n+1}-r_n)}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　(1) より，

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=2^{(r_{n+1}-r_n)}\iff\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{2^{r_{n+1}}}{2^{r_n}}\iff c_{n+1}=\frac{2^{r_{n+1}}}{2^{r_n}}c_n$$

であるから，

$$\begin{aligned}c_n&=\frac{2^{r_n}}{2^{r_{n-1}}}c_{n-1}\\&=\frac{2^{r_n}}{2^{r_{n-1}}}\cdot\frac{2^{r_{n-1}}}{2^{r_{n-2}}}c_{n-2}\\&=\frac{2^{r_n}}{2^{r_{n-1}}}\cdot\frac{2^{r_{n-1}}}{2^{r_{n-2}}}\cdot\frac{2^{r_{n-2}}}{2^{r_{n-3}}}c_{n-3}\\&=\cdots\cdots\\&=\frac{2^{r_n}}{2^{r_{n-1}}}\cdot\frac{2^{r_{n-1}}}{2^{r_{n-2}}}\cdot\frac{2^{r_{n-2}}}{2^{r_{n-3}}}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2^{r_2}}{2^{r_1}}c_1\\&=\frac{2^{r_n}}{2^{r_1}}c_1\end{aligned}$$

$r_1=\log_2(1+1)=1$ である．また，$2^{r_n}=2^{\log_2(n\sqrt{n}+\sqrt{n})}=n\sqrt{n}+\sqrt{n}$ であるから，

$$c_n=\frac{\sqrt{n}(n+1)}{2}c_1$$

一方，2 次方程式 $x^2 - p_n x + q_n = 0$ が異なる 2 つの実数解 $\alpha_n, \beta_n\ (\alpha_n < \beta_n)$ をもつことから，

${p_n}^2 - 4q_n > 0$ であり，その 2 解の差 c_n は，

$$c_n = \beta_n - \alpha_n = \sqrt{{p_n}^2 - 4q_n}$$

となる．したがって，$c_1 = \sqrt{{p_1}^2 - 4q_1} = \sqrt{4} = 2$ である．ゆえに，

$$c_n = \frac{\sqrt{n}(n+1)}{2}\cdot 2 \text{ より，} \boldsymbol{c_n = \sqrt{n}(n+1)}\cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　(2) より，

$$c_n = \sqrt{n}(n+1) \iff \sqrt{{p_n}^2 - 4q_n} = \sqrt{n}(n+1)$$

ここで，$p_n = n\sqrt{n}$ より，${p_n}^2 = (n\sqrt{n})^2 = n^3$ であるから，

$$\sqrt{n^3 - 4q_n} = \sqrt{n}(n+1)$$

であり，両辺を 2 乗して，

$$n^3 - 4q_n = n(n+1)^2$$

$$4q_n = n^3 - n(n^2 + 2n + 1)$$

$$4q_n = -n(2n+1)$$

$$\therefore\ \boldsymbol{q_n = -\frac{1}{4}n(2n+1)}\cdots\cdots(\text{答})$$

◇　♡

解説

(1) は，意外と方針に悩んだ人も多いのではないでしょうか？ポイントは，$r_n = \log_2(n\sqrt{n} + \sqrt{n})$ と置いていることです．これをヒントに，底が 2 の対数をとることを考えますが，今度は $\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ をどのように変形するかが問題となります．そこで，真数部分の $n\sqrt{n} + \sqrt{n}$ に着目して，$\sqrt{n}(n+1)$ を作ることを考えます．そのため，$\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ の分子分母に $\sqrt{n+1}$ をかけることで分母を $\sqrt{n}(n+1)$ にして，r_n を作ります．

(2) は，数列 $\{c_n\}$ に関する漸化式を導きます．$c_{n+1} = \dfrac{2^{r_{n+1}}}{2^{r_n}}c_n$ が解けるかどうかがポイントです．これは，n を一つずつ下げて繰り返しこの漸化式を用いるだけです．つまり，

$$c_n = \frac{2^{r_n}}{2^{r_{n-1}}}c_{n-1} \cdots\cdots ①$$

$$c_{n-1} = \frac{2^{r_{n-1}}}{2^{r_{n-2}}}c_{n-2} \cdots\cdots ②$$

$$c_{n-2} = \frac{2^{r_{n-2}}}{2^{r_{n-3}}}c_{n-3} \cdots\cdots ③$$

$$\vdots$$

として，② を ① へ代入して得られた式に ③ を代入することを c_1 になるまで繰り返します．後半は，c_1 の値が必要になりますが，(3) で c_n が必要になることを考えて，$c_n = \beta_n - \alpha_n$ を求めました．ちなみに，2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 解 α, β の差は，$D = b^2 - 4ac$ として，

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{D}}{|a|}$$

で表されることは，知っておくとよいでしょう．解の公式を使えば簡単に示せます．

方程式 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ で定まる楕円 E とその焦点 $\mathrm{F}(1,\ 0)$ がある．E 上に点 P をとり，直線 PF と E との交点のうち P と異なる点を Q とする．F を通り直線 PF と垂直な直線と E との 2 つの交点を R, S とする．

(1)　r を正の実数，θ を実数とする．点 $(r\cos\theta+1,\ r\sin\theta)$ が E 上にあるとき，r を θ で表せ．

(2)　P が E 上を動くとき，$\mathrm{PF}+\mathrm{QF}+\mathrm{RF}+\mathrm{SF}$ の最小値を求めよ．

方程式 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ で定まる楕円 E とその焦点 $\mathrm{F}(1,\,0)$ がある．E 上に点 P をとり，直線 PF と E との交点のうち P と異なる点を Q とする．F を通り直線 PF と垂直な直線と E との 2 つの交点を R, S とする．

(1) r を正の実数，θ を実数とする．点 $(r\cos\theta+1,\,r\sin\theta)$ が E 上にあるとき，r を θ で表せ．

(2) P が E 上を動くとき，PF + QF + RF + SF の最小値を求めよ．

【テーマ】：２次曲線

方針

(1) は，点 $(r\cos\theta+1,\,r\sin\theta)$ が E 上にあるときを考えるので，代入して r と θ の関係式を求めます．(2) では，点 F を極とし，x 軸を始線とする極座標を考えます．

解答

(1) 点 $(r\cos\theta+1,\,r\sin\theta)$ が E 上にあるとき，

$$\frac{(r\cos\theta+1)^2}{2}+(r\sin\theta)^2=1$$

を満たす．ゆえに，

$$r^2\cos^2\theta+2r\cos\theta+1+2r^2\sin^2\theta=2$$

$$r^2(1+\sin^2\theta)+2r\cos\theta-1=0$$

$$r=\frac{-\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta+(1+\sin^2\theta)}}{1+\sin^2\theta}$$

$$r=\frac{-\cos\theta\pm\sqrt{2}}{1+\sin^2\theta}$$

$$r=\frac{-\cos\theta\pm\sqrt{2}}{2-\cos^2\theta}$$

$$r=\frac{-\cos\theta\pm\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-\cos\theta)(\sqrt{2}+\cos\theta)}$$

$r>0$ であるから，

$$r=\frac{-\cos\theta+\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-\cos\theta)(\sqrt{2}+\cos\theta)}$$

$$\boldsymbol{r=\frac{1}{\sqrt{2}+\cos\theta}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) 楕円 E の焦点 $\mathrm{F}(1,\,0)$ を極，x 軸を始線とする極座標 $(r,\,\theta)$ $(r\geqq 0,\ \theta$ は実数$)$ を考える．この極座標と座標平面上の点 $(x,\,y)$ は，

$$\begin{cases} x=r\cos\theta+1 \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

のように対応するので，楕円 E を極方程式で表すと，(1) の結果から $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\cos\theta}$ である．ここで，点 P の偏角を θ とし，点 P の極座標を $\mathrm{P}(r_{\mathrm{P}},\,\theta)$ とするとき，点 Q, R, F の極座標はそれぞれ

$$\mathrm{Q}(r_{\mathrm{Q}},\,\theta+\pi),\quad \mathrm{R}\left(r_{\mathrm{R}},\,\theta+\frac{\pi}{2}\right),\quad \mathrm{S}\left(r_{\mathrm{S}},\,\theta+\frac{3}{2}\pi\right)$$

と表せる．ただし，$r_{\mathrm{P}}>0,\ r_{\mathrm{Q}}>0,\ r_{\mathrm{R}}>0,\ r_{\mathrm{S}}>0$ とする．よって，

$$r_{\mathrm{P}}=\frac{1}{\sqrt{2}+\cos\theta}$$

$$r_{\mathrm{Q}}=\frac{1}{\sqrt{2}+\cos(\theta+\pi)}=\frac{1}{\sqrt{2}-\cos\theta}$$

$$r_{\mathrm{R}}=\frac{1}{\sqrt{2}+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}-\sin\theta}$$

$$r_{\mathrm{S}}=\frac{1}{\sqrt{2}+\cos\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sin\theta}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\mathrm{PF}+\mathrm{QF}+\mathrm{RF}+\mathrm{SF}&=\frac{1}{\sqrt{2}+\cos\theta}+\frac{1}{\sqrt{2}-\cos\theta}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sin\theta}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sin\theta}\\&=\frac{2\sqrt{2}}{2-\cos^2\theta}+\frac{2\sqrt{2}}{2-\sin^2\theta}\\&=\frac{2\sqrt{2}(2-\sin^2\theta+2-\cos^2\theta)}{(2-\cos^2\theta)(2-\sin^2\theta)}\\&=\frac{2\sqrt{2}(4-1)}{(2-\cos^2\theta)(1+\cos^2\theta)}\\&=\frac{6\sqrt{2}}{(2-\cos^2\theta)(1+\cos^2\theta)}\end{aligned}$$

ここで，$\cos^2\theta=t$ とおくと，$0\leqq t\leqq 1$ であり，$f(\theta)=\mathrm{PF}+\mathrm{QF}+\mathrm{RF}+\mathrm{SF}$ とおくと，

$$f(\theta)=\frac{6\sqrt{2}}{(2-t)(1+t)}=\frac{6\sqrt{2}}{-t^2+t+2}=\frac{6\sqrt{2}}{-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}$$

よって，$0\leqq t\leqq 1$ より，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき $f(\theta)$ の分母は最大値をとるので，$f(\theta)$ は最小値

$$\frac{6\sqrt{2}}{\frac{9}{4}}=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

をとる．

◇ ♡

解説

(1) は，点 $(r\cos\theta+1,\ r\sin\theta)$ が E 上にあるので，代入して r と θ の関係式を導きます．因数分解が思いつけば答えがすぐ求められますが，思いつかなければ解の公式を用いて求めることもできます．なお，$r>0$ であることに注意をしましょう．

(2) は，(1) の問題文にある $(r\cos\theta+1,\ r\sin\theta)$ が大きなヒントとなります．E 上の点をこのようにおいて，(1) で極方程式を求めたので，極座標で考えるとスッキリと求められます．点 P の偏角を θ とすれば，残り 3 点の偏角もわかります．また，$\mathrm{PF}=r_{\mathrm{P}}$, $\mathrm{QF}=r_{\mathrm{Q}}$, $\mathrm{RF}=r_{\mathrm{R}}$, $\mathrm{SF}=r_{\mathrm{S}}$ であることから，(1) で求めた極方程式が利用できます．あとは，三角関数の最小値問題に帰着します．

座標平面上の原点を O とする．点 A$(a, 0)$，点 B$(0, b)$ および点 C が

$$\mathrm{OC} = 1, \quad \mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA}$$

を満たしながら動く．

（1） $s = a^2 + b^2$, $t = ab$ とする．s と t の関係を表す等式を求めよ．

（2） △ABC の面積のとりうる値の範囲を求めよ．

座標平面上の原点を O とする．点 A$(a, 0)$，点 B$(0, b)$ および点 C が

$$\mathrm{OC}=1,\quad \mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$$

を満たしながら動く．

（1） $s=a^2+b^2$, $t=ab$ とする．s と t の関係を表す等式を求めよ．

（2） △ABC の面積のとりうる値の範囲を求めよ．

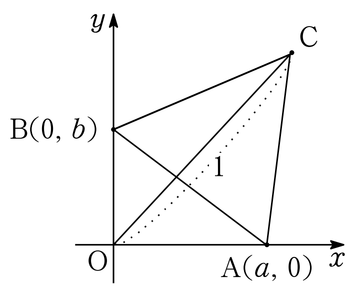
【テーマ】：ベクトルと図形

方針

(1) では，ベクトルを利用すると計算が楽になります．(2) は，(1) の結果を用いて a^2, b^2 を 2 解にもつ 2 次方程式を求め，実数条件より s, t のとり得る値の範囲を求めます．

♣ ♠

解答



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-a, b)$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直な単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると，

$$\vec{e}=\pm\frac{(b, a)}{|(b, a)|}=\pm\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

である．線分 AB の中点を M とすると，$\mathrm{M}\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right)$ であり，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2+b^2}\,\vec{e}\\&=\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\\&=\left(\frac{a\pm\sqrt{3}b}{2},\ \frac{b\pm\sqrt{3}a}{2}\right)\quad\text{（複号同順）}\end{aligned}$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=1$ であるから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2=1$ より，

$$\left(\frac{a\pm\sqrt{3}b}{2}\right)^2+\left(\frac{b\pm\sqrt{3}a}{2}\right)^2=1\quad\text{（複号同順）}$$

$$a^2+b^2\pm\sqrt{3}ab=1$$

よって，s, t の満たす関係式は，$\boldsymbol{s\pm\sqrt{3}t=1}$……(答)

(2) △ABC の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}(a^2+b^2)\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}s$$

である．ここで，$a^2+b^2=s$, $a^2b^2=t^2$ であることから，a^2, b^2 を 2 解にもつ 2 次方程式は，

$$u^2-su+t^2=0\ \cdots\cdots\ ①$$

となり，これが 0 以上の 2 つの実数解をもてばよい．

① の判別式を D とすると，

$$D \geqq 0 \text{ かつ } s \geqq 0 \text{ かつ } t \geqq 0$$

を満たせばよい．(1) より，$t^2 = \dfrac{(1-s)^2}{3}$ であるから，

$$D \geqq 0 \iff s^2 - \frac{4}{3}(1-s)^2 \geqq 0 \iff 4-2\sqrt{3} \leqq s \leqq 4+2\sqrt{3} \cdots\cdots ②$$

$$s \geqq 0 \cdots\cdots ③$$

$$t \geqq 0 \iff \frac{(1-s)^2}{3} \geqq 0 \cdots\cdots ④$$

④ は常に成り立ち，② と ③ の共通部分は ② と一致するので，$4-2\sqrt{3} \leqq s \leqq 4+2\sqrt{3}$ である．よって，

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(4-2\sqrt{3}\right) \leqq \frac{\sqrt{3}}{4}s \leqq \frac{\sqrt{3}}{4}\left(4+2\sqrt{3}\right)$$

$$\boldsymbol{\sqrt{3}-\frac{3}{2} \leqq S \leqq \sqrt{3}+\frac{3}{2}}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

◇ ♡

解説

(1) は，C の座標を (p, q) とおいて，直線の方程式などを求めて図形と方程式の知識でも解くことができますが，計算量が多くなるため，ベクトルを利用するという解法をとっています．ベクトルを利用することですっきりとした答案が作成できるため，見通しがよくなります．ベクトルの力を見せ付けられる問題でもありますね！なお，複素数平面を学習している人は，点 A を点 B のまわりに 60° 回転させても点 C の座標を求めることができます．多くの知識があれば，最適な方法で解答できるため，日頃から別解の研究をしておくと実戦で役立つでしょう．

自然数 n に対し，方程式

$$\frac{1}{x^n} - \log x - \frac{1}{e} = 0$$

を考える．ただし，対数は自然対数であり，e はその底とする．

(1)　上の方程式は $x \geqq 1$ にただ一つの解をもつことを示せ．

(2)　(1) の解を x_n とする．このとき，$\lim_{n \to \infty} x_n = 1$ を示せ．

自然数 n に対し，方程式

$$\frac{1}{x^n}-\log x-\frac{1}{e}=0$$

を考える．ただし，対数は自然対数であり，e はその底とする．

（1） 上の方程式は $x \geqq 1$ にただ一つの解をもつことを示せ．

（2） (1) の解を x_n とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n=1$ を示せ．

【テーマ】：実数解の極限値

方針

(1) は，単調性と中間値の定理を用います．(2) は，(1) の結果から x_n を n を含んだ式で評価します．

♣ ♠

解答

（1） **【証明】**

$f(x)=\dfrac{1}{x^n}-\log x-\dfrac{1}{e}$ とおくと，

$$f'(x)=-n\cdot x^{-n-1}-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{-n-x^n}{x^{n+1}}<0 \quad (\because\ x \geqq 1,\ n \text{ は自然数})$$

よって，$f(x)$ のグラフは単調減少である．

$$f(1)=1-\frac{1}{e}>0\ ,\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$$

であり，$f(x)$ は $x \geqq 1$ で連続な関数であるから，中間値の定理より $f(x)=0$ を満たす実数 x がただ 1 つ存在する．以上より，示された．

（証明終）

（2） **【証明】**

$$f\left(e^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{e}-\frac{1}{n}-\frac{1}{e}=-\frac{1}{n}<0$$

となるので，(1) から，

$$1<x_n<e^{\frac{1}{n}}$$

である．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}}=1$ より，はさみうちの原理から，

$$\lim_{n\to\infty} x_n=1$$

である．ゆえに，示された．

（証明終）

◇ ♡

解説

与えられた方程式を直接解くことはできないので，左辺を $f(x)$ とおいて，実数解の個数をグラフを用いて考えます．ただ 1 つの実数解をもつことを示したいので，単調性と中間値の定理を利用します．(1) の解は具体的に求められないため，不等式を用いて解のとり得る値の範囲を求めます．後は，はさみうちの原理を利用すれば極限値が求められます．

原点を O とする xyz 空間内で，x 軸上の点 A，xy 平面上の点 B，z 軸上の点 C を，次を満たすように定める．

$$\angle \mathrm{OAC} = \angle \mathrm{OBC} = \theta, \quad \angle \mathrm{AOB} = 2\theta, \quad \mathrm{OC} = 3$$

ただし，A の x 座標，B の y 座標，C の z 座標はいずれも正であるとする．さらに，△ABC 内の点のうち，O からの距離が最小の点を H とする．また，$t = \tan\theta$ とおく．

（1） 線分 OH の長さを t の式で表せ．

（2） H の z 座標を t の式で表せ．

原点を O とする xyz 空間内で，x 軸上の点 A，xy 平面上の点 B，z 軸上の点 C を，次を満たすように定める．

$$\angle\mathrm{OAC} = \angle\mathrm{OBC} = \theta, \quad \angle\mathrm{AOB} = 2\theta, \quad \mathrm{OC} = 3$$

ただし，A の x 座標，B の y 座標，C の z 座標はいずれも正であるとする．さらに，△ABC 内の点のうち，O からの距離が最小の点を H とする．また，$t = \tan\theta$ とおく．

（1） 線分 OH の長さを t の式で表せ．

（2） H の z 座標を t の式で表せ．

【テーマ】：空間図形の計量

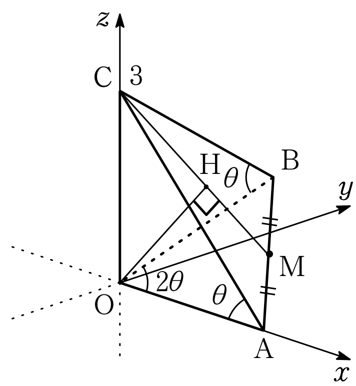
方針

空間図形を考えるときは，考えている三角形を取り出して平面図形として捉えるとわかりやすくなります．

解答

（1） $\angle\mathrm{OAC} = \angle\mathrm{OBC} = \theta, \angle\mathrm{COA} = \angle\mathrm{COB} = 90^\circ$ であり，OC を共有しているので，

$$\triangle\mathrm{OAC} \equiv \triangle\mathrm{OBC}$$



よって，OA = OB である．

また，△OAC において，$\mathrm{OA} = \dfrac{3}{\tan\theta}$ であるから，$t = \tan\theta$ のとき，

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \frac{3}{t}$$

次に，AB の中点を M とすると，$\angle\mathrm{AOM} = \theta, \angle\mathrm{OMA} = 90^\circ$ より，

$$\mathrm{OM} = \mathrm{OA}\cos\theta = \frac{3\cos\theta}{t}$$

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ であるから，

$$\mathrm{OM} = \frac{3\cos\theta}{t} = \frac{3}{t\sqrt{1+t^2}}$$

△OMC で三平方の定理より，

$$\mathrm{MC}^2 = \mathrm{OC}^2 + \mathrm{OM}^2 = 9 + \frac{9}{t^2(1+t^2)} = \frac{9(t^4+t^2+1)}{t^2(1+t^2)}$$

一方，△OMC ∽ △HOC より，

$$\mathrm{OM} : \mathrm{MC} = \mathrm{HO} : \mathrm{OC} \text{ すなわち } \mathrm{OH}\cdot\mathrm{MC} = \mathrm{OM}\cdot\mathrm{OC}$$

したがって，

$$\mathrm{OH} = \frac{\mathrm{OM}\cdot\mathrm{OC}}{\mathrm{MC}} = \frac{\dfrac{3}{t\sqrt{1+t^2}}\cdot 3}{\dfrac{3}{t}\sqrt{\dfrac{t^4+t^2+1}{1+t^2}}} = \boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{t^4+t^2+1}}} \cdots\cdots(\text{答})$$

（2） △OCH において，H から OC に垂線を下ろしその足を I とすると，H の z 座標は OI の長さと等しい．

△OMC ∽ △IOH より，

$$\mathrm{OM}:\mathrm{MC}=\mathrm{IO}:\mathrm{OH} \text{ すなわち } \mathrm{IO}\cdot\mathrm{MC}=\mathrm{OM}\cdot\mathrm{OH}$$

したがって，

$$\mathrm{IO}=\frac{\mathrm{OM}\cdot\mathrm{OH}}{\mathrm{MC}}=\frac{\dfrac{3}{t\sqrt{1+t^2}}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{t^4+t^2+1}}}{\dfrac{3}{t}\sqrt{\dfrac{t^4+t^2+1}{1+t^2}}}=\boldsymbol{\frac{3}{t^4+t^2+1}}\cdots\cdots(\text{答})$$

―――――― ♢ ―――――― ♡ ――――――

解説

空間図形が苦手な人は，考えている三角形を取り出して考えましょう．そうすれば平面図形の問題となるため，考え易くなります．本問は，相似すなわち三角比の定義を用いて考えることで解決できます．もちろんベクトルを用いて考えることもできるので，別解を考えるのもよいでしょう．

$a > 0$ とする．曲線 $y = e^{-x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x = a$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を A とする．

（1） A の体積 V を求めよ．

（2） 点 $(t,\,0)$ $(-a \leqq t \leqq a)$ を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，不等式 $S(t) \leqq \displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)}\,ds$ を示せ．

（3） 不等式 $\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})} \leqq \displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx$ を示せ．

$a>0$ とする．曲線 $y=e^{-x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x=a$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を A とする．

(1)　A の体積 V を求めよ．

(2)　点 $(t,\,0)$ $(-a \leqq t \leqq a)$ を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，不等式 $S(t) \leqq \displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)}\,ds$ を示せ．

(3)　不等式 $\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})} \leqq \displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx$ を示せ．

【テーマ】：回転体の体積

方針

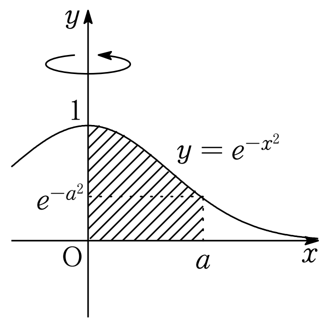
(1) は，y 軸まわりに回転させるので，y 方向に積分をします．曲線部分の回転と円柱の体積を合わせて考えると積分が少し楽でしょう．(2) は，回転体を $x=t$ で切り取った部分の面積を計算するので，切り口の図形を考えます．(3) は，(1), (2) の結果を利用しましょう．

♣　♠

解答

(1)　$y=e^{-x^2}$ のグラフは右図のようになり，図の斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転させたときの回転体が A である．$y=e^{-x^2}$ より，$x^2=-\log y$ であるから，

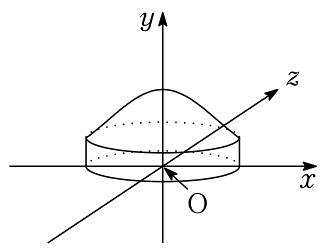
$$
\begin{aligned}
V &= \pi a^2 e^{-a^2} + \int_{e^{-a^2}}^{1} \pi x^2\,dy \\
&= \pi a^2 e^{-a^2} - \pi \int_{e^{-a^2}}^{1} \log y\,dy \\
&= \pi a^2 e^{-a^2} - \pi \Big[\, y\log y - y \,\Big]_{e^{-a^2}}^{1} \\
&= \pi a^2 e^{-a^2} - \pi \left\{-1 - \left(e^{-a^2}(-a^2) - e^{-a^2}\right)\right\} \\
&= \boldsymbol{\pi\left(1-e^{-a^2}\right)} \cdots\cdots(\textbf{答})
\end{aligned}
$$

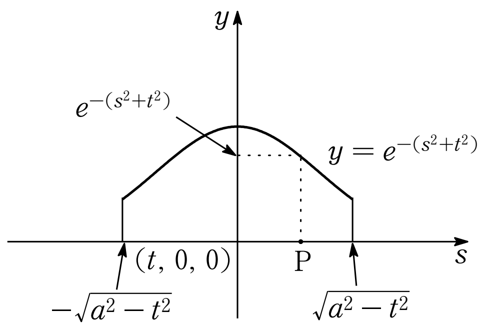


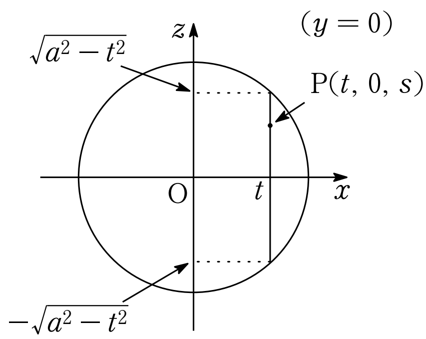
(2)　**【証明】**

xy 平面に対して垂直方向に z 軸を定め，xz 平面において直線 $x=t$ 上に点 $\mathrm{P}(t,\,0,\,s)$ をとる．

このとき，$\mathrm{OP}^2=t^2+s^2$ であるから，平面 $x=t$ による切り口は，下図のようになる．







ゆえに，

$$
S(t) = \int_{-\sqrt{a^2-t^2}}^{\sqrt{a^2-t^2}} e^{-(s^2+t^2)}\,ds
$$

ここで，$e^{-(s^2+t^2)}>0$ であり，$-a \leqq -\sqrt{a^2-t^2} \leqq s \leqq \sqrt{a^2-t^2} \leqq a$ より，

$$S(t) \leqq \int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)}\,ds$$

が示された． **（証明終）**

（3）**【証明】**

（2）より，

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^{a} S(t)\,dt \leqq \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)}\,ds\,dt \\ &= \int_{-a}^{a} e^{-t^2}\int_{-a}^{a} e^{-s^2}\,ds\,dt \\ &= \int_{-a}^{a} e^{-s^2}\,ds \int_{-a}^{a} e^{-t^2}\,dt \\ &= \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx\right)^2 \end{aligned}$$

ゆえに，（1）の結果から，

$$\pi\left(1-e^{-a^2}\right) \leqq \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

であるから，両辺正より，

$$\sqrt{\pi\left(1-e^{-a^2}\right)} \leqq \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx$$

が示された． **（証明終）**

◇ ♡

解説

（1）は，y 軸に関する回転体の体積なので，基本問題です．バウムクーヘン積分で求めることもできます．解答は，円柱の体積 $\pi a^2 e^{-a^2}$ と $y=e^{-x^2}$（$e^{-a^2} \leqq y \leqq 1$）部分を y 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積を合わせています．

（2）のポイントは，切り口の図形がどのような形になるかです．$y=e^{-x^2}$ を y 軸のまわりに回転させているので，OP^2 を求めることで，原点からの距離を考えます．これが，$y=e^{-x^2}$ の x に対応します．したがって，切り口の上部に現れる曲線は，$y=e^{-\mathrm{OP}^2}$ の形になることがわかります．あとは，これを積分して

$$-a \leqq -\sqrt{a^2-t^2} \leqq s \leqq \sqrt{a^2-t^2} \leqq a$$

を用いれば証明したい式が得られます．これは，$e^{-x^2}>0$ なので，積分区間を広くとれば，定積分の値が大きくなるということを利用しています．

（3）は，（1)，(2）を利用します．ポイントは，$\displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-s^2}\,ds$ が定数になるということを利用することです．また，定積分の値は，積分変数によらず同じ値をとります．したがって，

$$\int_{-a}^{a} e^{-s^2}\,ds = \int_{-a}^{a} e^{-t^2}\,dt = \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx$$

が成り立ちます．

a を実数とし，数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ を

$$a_1 = a,\quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 2a_n & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases},\qquad b_1 = a,\quad b_{n+1} = \begin{cases} 2b_n & (n \text{ が奇数のとき}) \\ b_n + 1 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

で定める．

(1) a_2, a_3, a_4 および b_2, b_3, b_4 を求めよ．

(2) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_{2n}$ で定める．$\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{S_n\}, \{T_n\}$ および $\{U_n\}$ をそれぞれ

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} a_k,\quad T_n = \sum_{k=1}^{2n} b_k,\quad U_n = S_n - T_n$$

で定める．

(i) $\{S_n\}$ の一般項を求めよ．

(ii) $a = 1$ のとき，$\{U_n\}$ の一般項を求めよ．

a を実数とし，数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ を

$$a_1 = a,\quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (n\text{ が奇数のとき}) \\ 2a_n & (n\text{ が偶数のとき}) \end{cases},\qquad b_1 = a,\quad b_{n+1} = \begin{cases} 2b_n & (n\text{ が奇数のとき}) \\ b_n + 1 & (n\text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

で定める．

(1) a_2, a_3, a_4 および b_2, b_3, b_4 を求めよ．

(2) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_{2n}$ で定める．$\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{S_n\}, \{T_n\}$ および $\{U_n\}$ をそれぞれ

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} a_k,\quad T_n = \sum_{k=1}^{2n} b_k,\quad U_n = S_n - T_n$$

で定める．

(i) $\{S_n\}$ の一般項を求めよ．

(ii) $a = 1$ のとき，$\{U_n\}$ の一般項を求めよ．

【テーマ】：隣接２項間漸化式

方針

(1) は，与えられた漸化式から順次 $a_2, a_3, a_4, b_2, b_3, b_4$ を求めます．(1) で，各項をどのようにして求めるかを理解しましょう．(2) は，$\{c_n\}$ の漸化式を導きます．(3) は，(2) と同様にして，b_{2n} を求めます．

♣ ♠

解答

(1) 題意より，$a_{n+1} = a_n + 1$ と $a_{n+1} = 2a_n$ を交互に用いて，

$$\boldsymbol{a_2 = a + 1,\ a_3 = 2a + 2,\ a_4 = 2a + 3}\cdots\cdots\text{(答)}$$

また，$b_{n+1} = 2b_n$ と $b_{n+1} = b_n + 1$ を交互に用いて，

$$\boldsymbol{b_2 = 2a,\ b_3 = 2a + 1,\ b_4 = 4a + 2}\cdots\cdots\text{(答)}$$

(2) $c_{n+1} = a_{2(n+1)} = a_{2n+2}$ であるから，

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= a_{2n+2} \\ &= a_{2n+1} + 1 \\ &= 2a_{2n} + 1 \\ &= 2c_n + 1 \end{aligned}$$

である．$c_1 = a_2 = a + 1$ であり，

$$c_{n+1} = 2c_n + 1 \iff c_{n+1} + 1 = 2(c_n + 1)$$

であるから，数列 $\{c_n + 1\}$ は，初項 $c_1 + 1 = a + 2$，公比 2 の 等比数列である．よって，

$$c_n + 1 = (a+2)\cdot 2^{n-1} \iff \boldsymbol{c_n = (a+2)\cdot 2^{n-1} - 1}\cdots\cdots\text{(答)}$$

(3) (i) l を自然数とするとき，$a_{2l-1}=a_{2l}-1$ であるから，

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{l=1}^{n}(a_{2l}-1+a_{2l}) \\ &= \sum_{l=1}^{n}(2a_{2l}-1) \\ &= \sum_{l=1}^{n}\{(a+2)\cdot 2^l-3\} \\ &= (a+2)\cdot\frac{2(2^n-1)}{2-1}-3n \\ &= \boldsymbol{(a+2)(2^{n+1}-2)-3n}\cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$

(ii) (2) と同様に考えて，$d_n=b_{2n}$ とおくと，

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= b_{2n+2}=2b_{2n+1} \\ &= 2(b_{2n}+1)=2d_n+2 \end{aligned}$$

である．$a=1$ より，$d_1=b_2=2$ であり，

$$d_{n+1}=2d_n+2 \iff d_{n+1}+2=2(d_n+2)$$

であるから，数列 $\{d_n+2\}$ は，初項 $d_1+2=4$，公比 2 の 等比数列である．よって，

$$d_n+2=4\cdot 2^{n-1} \iff d_n=2^{n+1}-2$$

したがって，

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{l=1}^{n}(b_{2l-1}+b_{2l})=\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{1}{2}b_{2l}+b_{2l}\right) \\ &= \frac{3}{2}\sum_{l=1}^{n}d_l=\frac{3}{2}\sum_{l=1}^{n}(2^{l+1}-2) \\ &= \frac{3}{2}\left\{\frac{4(2^n-1)}{2-1}-2n\right\}=6(2^n-1)-3n \end{aligned}$$

$a=1$ のとき，$S_n=3\cdot 2^{n+1}-3n-6$ であるから，

$$U_n=S_n-T_n=3\cdot 2^{n+1}-3n-6-\{6(2^n-1)-3n\}=\mathbf{0}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

n の偶奇によって，漸化式が変わるため状況を把握する設問として (1) があります．もしも，このような設問がない場合は，自力で $n=1, 2, 3, \cdots$ を調べて状況を把握しなければいけません．(2) は，$c_n=a_{2n}$ と置くように指示されているので，数列 $\{c_n\}$ に関する漸化式を考えればよいことがわかります．これは，数列 $\{a_n\}$ の偶数番目の項だけを新しい数列 $\{c_n\}$ にしましょうということを表しています．(3) は和の計算をしますが，(2) をヒントにしながら計算をしなければいけません．特に，a_{2l-1} を a_{2l} で表すところでは，$2l-1$ が奇数なので，$a_{2l}=a_{2l-1}+1$ すなわち $a_{2l-1}=a_{2l}-1$ となります．b_{2l-1} も同様に，$b_{2l}=2b_{2l-1}$ より，$b_{2l-1}=\dfrac{1}{2}b_{2l}$ となります．

n は 2 以上の自然数とし，

$$f(\theta)=\frac{\cos^{n-1}\theta\sin^{n-1}\theta}{\cos^{2n}\theta+\sin^{2n}\theta}$$

とする．次の問いに答えよ．

（1） $t=\tan^n\theta$ と変数変換することにより，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\theta)\,d\theta$ を求めよ．

（2） $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ．

n は 2 以上の自然数とし，

$$f(\theta)=\frac{\cos^{n-1}\theta\sin^{n-1}\theta}{\cos^{2n}\theta+\sin^{2n}\theta}$$

とする．次の問いに答えよ．

(1)　$t=\tan^n\theta$ と変数変換することにより，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\theta)\,d\theta$ を求めよ．

(2)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ．

【テーマ】：微積分の融合

方針

(1) は，指示されているように置換積分を行いますが，その後もう一度置換積分を行わなければいけません．(2) は，$x=\tan\theta$ とおいて，x の関数に変換すると微分し易くなります．ただし，x のとり得る値の範囲に注意しましょう．

♣　♠

解答

(1)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ において，$\cos^{2n}\theta\neq 0$ であるから，

$$f(\theta)=\frac{\dfrac{\cos^{n-1}\theta\sin^{n-1}\theta}{\cos^{2n}\theta}}{1+\dfrac{\sin^{2n}\theta}{\cos^{2n}\theta}}=\frac{\dfrac{1}{\cos^2\theta}\cdot\tan^{n-1}\theta}{1+\tan^{2n}\theta}\ \cdots\cdots\ ①$$

よって，$t=\tan^n\theta$ とおくとき，$dt=n\tan^{n-1}\theta\cdot\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ であり，

t と θ の対応関係は，右表のようになる．

θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{4}$
t	0	$\to$	1

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\theta)\,d\theta=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{1}{n}\,dt=\frac{1}{n}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

さらに，$t=\tan u$ とおくと，$dt=\dfrac{1}{\cos^2 u}\,du$ であり，t と u の対応関係は，

右表のようになる．したがって，

t	0	$\to$	1
u	0	$\to$	$\frac{\pi}{4}$

$$\frac{1}{n}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2 u}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}\,du$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}du=\boldsymbol{\frac{\pi}{4n}}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(2)　① より，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に対して，$\tan\theta=x$ とおくと，$x\geqq 0$ であり，

$$f(\theta)=\frac{(1+\tan^2\theta)\tan^{n-1}\theta}{1+\tan^{2n}\theta}=\frac{(1+x^2)x^{n-1}}{1+x^{2n}}$$

$f(\theta)=g(x)$ とおくと，

$$g'(x)=\frac{\{2x\cdot x^{n-1}+(1+x^2)(n-1)x^{n-2}\}(1+x^{2n})-(1+x^2)x^{n-1}\cdot 2nx^{2n-1}}{(1+x^{2n})^2}$$

$$=\frac{x^{n-2}[\{(n-1)+(n+1)x^2\}(1+x^{2n})-2n(1+x^2)x^{2n}]}{(1+x^{2n})^2}$$

$$=\frac{x^{n-2}\{(1-n)x^{2n+2}-(n+1)x^{2n}+(n+1)x^2+(n-1)\}}{(1+x^{2n})^2}$$

$$=\frac{x^{n-2}\{(n+1)x^2(1-x^{2n-2})+(n-1)(1-x^{2n+2})\}}{(1+x^{2n})^2}$$

$n \geqq 2$ より，$n+1>0$, $n-1>0$ であるから，$0 \leqq x \leqq 1$ で，$g'(x) \geqq 0$ であり，$x>1$ で $g'(x)<0$ である.

また，

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{x^{n+1}} + \dfrac{1}{x^{n-1}}}{\dfrac{1}{x^{2n}} + 1} = 0$$

よって，増減表は次のようになる.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	(0)

$x=1$ のとき，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ であり，$x=0$ のとき，$\theta=0$ である.

また，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ である。ゆえに，求める最大値・最小値は，

$$\begin{cases} \textbf{最大値：1} \quad \left(\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{4}}\right) \\ \textbf{最小値：0} \quad \left(\boldsymbol{\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{2}}\right) \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

(1) は，ヒントが与えられていますが，これだけでは解けません．その後，$\dfrac{1}{1+t^2}$ の積分が出てきます．しかし，これは基本演習ができている人であれば容易に計算できます．

(2) は，(1) とは独立設問となっていますが，(1) の置換をヒントにします．① をみて，$f(\theta)$ が $\tan\theta$ だけで表せることに気がつけば，$x=\tan\theta$ と置換することで x の式を作ることができるので，後は微分すれば最大値と最小値を求められます．計算が少々面倒なので，計算間違いには注意しましょう．解答では，$\tan\theta$ が $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で定義できないため，$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ と $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で分けて考えています。

ちなみに，時々 $f(\theta)=\dfrac{(1+x^2)x^{n-1}}{1+x^{2n}}$ より，

$$f'(\theta)=\cdots\cdots=\frac{x^{n-2}\{(n+1)x^2(1-x^{2n-2})+(n-1)(1-x^{2n+2})\}}{(1+x^{2n})^2}$$

のように書く人がいますが，これは間違いです．『′』は，$f(\theta)$ が θ の関数なので，θ で微分しましたという記号です．正しくは，$\dfrac{d}{d\theta}f(\theta)$ と書くところを $f'(\theta)$ としています．しかし，実際は x で微分するので，$f(\theta)=g(x)$ とおいて，$g'(x)=\cdots\cdots$ とするべきでしょう．

$\angle \mathrm{BAC} = 45^\circ$ である $\triangle \mathrm{ABC}$ において，$\mathrm{AP} = 1$, $\angle \mathrm{BAP} = 15^\circ$ を満たす辺 BC 上の点 P が存在するとき，次の問いに答えなさい．

（1） $\sin\angle \mathrm{BAP}$ の値を求めなさい．

（2） $\angle \mathrm{APC} = \theta$ とするとき，θ のとり得る値の範囲を求めなさい．

（3） $\triangle \mathrm{ABC}$ の面積を S とするとき，$\dfrac{1}{S}$ を θ を用いて表しなさい．

（4） S を最小にする θ の値を求めなさい．また，そのときの S の値を求めなさい．

$\angle BAC = 45^\circ$ である $\triangle ABC$ において，$AP = 1$, $\angle BAP = 15^\circ$ を満たす辺 BC 上の点 P が存在するとき，次の問いに答えなさい．

(1)　$\sin \angle BAP$ の値を求めなさい．

(2)　$\angle APC = \theta$ とするとき，θ のとり得る値の範囲を求めなさい．

(3)　$\triangle ABC$ の面積を S とするとき，$\dfrac{1}{S}$ を θ を用いて表しなさい．

(4)　S を最小にする θ の値を求めなさい．また，そのときの S の値を求めなさい．

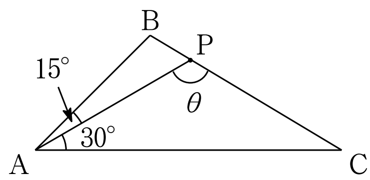
【テーマ】：三角関数の図形への応用

方針

(1) は加法定理で求められます．(2) は，$\angle ACP$ と $\angle ABC$ を θ を用いて表すと範囲が求められます．(3) は，正弦定理を利用します．(4) は，S が最小となるときは，$\dfrac{1}{S}$ が最大となるときであることを利用します．

♣　♠

解答



(1)　$\angle BAP = 15^\circ$ であるから，加法定理より，

$$\sin\angle BAP = \sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$$
$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$\triangle APC$, $\triangle APB$ の内角の和について，

$$\angle APC + \angle PAC < 180^\circ,\quad \angle APB + \angle PAB < 180^\circ$$

であるから，

$$\theta + 30^\circ < 180^\circ,\quad (180^\circ - \theta) + 15^\circ < 180^\circ$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{15^\circ < \theta < 150^\circ} \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　$\angle ABP = \theta - 15^\circ$，$\angle ACP = 150^\circ - \theta$ であるから，$\triangle ABP$ において正弦定理より，

$$\frac{1}{\sin(\theta - 15^\circ)} = \frac{AB}{\sin(180^\circ - \theta)} \iff AB = \frac{\sin\theta}{\sin(\theta - 15^\circ)}$$

$\triangle APC$ において正弦定理より，

$$\frac{1}{\sin(150^\circ - \theta)} = \frac{AC}{\sin\theta} \iff AC = \frac{\sin\theta}{\sin(150^\circ - \theta)}$$

よって，

$$S = \frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin(\theta - 15^\circ)}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin(150^\circ - \theta)}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\frac{1}{S} = \frac{2\sqrt{2}\sin(\theta - 15^\circ)\sin(150^\circ - \theta)}{\sin^2\theta}} \cdots\cdots(\text{答})$$

(4)　S が最小となるときは，$\dfrac{1}{S}$ が最大となるときである．(3) より，

$$\frac{1}{S}=2\sqrt{2}\cdot\frac{(\sin\theta\cos15^\circ-\cos\theta\sin15^\circ)(\sin150^\circ\cos\theta-\cos150^\circ\sin\theta)}{\sin^2\theta}$$
$$=2\sqrt{2}\left(\cos15^\circ-\sin15^\circ\cdot\frac{1}{\tan\theta}\right)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\tan\theta}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ここで，$\dfrac{1}{\tan\theta}=t$ とおくと，

$$\frac{1}{S}=2\sqrt{2}(\cos15^\circ-\sin15^\circ t)\left(\frac{1}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{2}(\cos15^\circ-\sin15^\circ t)(t+\sqrt{3})$$

である．(1) より，$\sin15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ であり，同様にすると，$\cos15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ を得るので，

$$\frac{1}{S}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}t\right)(t+\sqrt{3})$$
$$=\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\left(t-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)(t+\sqrt{3})$$
$$=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\{t-(2+\sqrt{3})\}(t+\sqrt{3})$$
$$=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\{(t-1)^2-2\sqrt{3}-4\}$$

$t=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ であるから，(2) より，

$$\frac{\cos150^\circ}{\sin150^\circ}<t<\frac{\cos15^\circ}{\sin15^\circ}\quad\text{すなわち}\quad-\sqrt{3}<t<2+\sqrt{3}$$

である．よって，$t=1$ のとき，$\dfrac{1}{S}$ は最大値 $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}(4+2\sqrt{3})$ をとるので，S の最小値は，

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{1}{4+2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+1}{3-1}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}$$
$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}\quad\boldsymbol{(\theta=45^\circ)}\cdots\cdots\text{(答)}$$

◇　♡

解説

(2) は三角形が成立するための角の条件を考えます．内角の和が 180° より小さくなる必要があります．(3), (4) は計算も複雑になり比較的難易度が上がります．正弦定理や加法定理を用いて計算し，さらに (1) の計算結果も利用します．(4) は，S の最小値を求めるのですが，(3) で $\dfrac{1}{S}$ を求めているのでこれをヒントにします．S が最小となるのは，$\dfrac{1}{S}$ が最大となるときと考えます．ただ，これだけではダメで，$\dfrac{1}{S}$ の式には，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ が混在しています．これをどのように処理するかがポイントとなります．分母にある $\sin^2\theta$ を使うと $\dfrac{1}{\tan\theta}$ の式になります．そこで $\dfrac{1}{\tan\theta}=t$ として，t の 2 次式にして最大値を考えようという方針で計算をしています．ただし，t のとり得る値の範囲を求めることを忘れないようにしましょう．

xy 平面において，次の式が表す曲線を C とする．

$$x^2 + 4y^2 = 1, \quad x > 0, \quad y > 0$$

P を C 上の点とする．P で C に接する直線を ℓ とし，P を通り ℓ と垂直な直線を m として，x 軸と y 軸と m で囲まれてできる三角形の面積を S とする．P が C 上の点全体を動くとき，S の最大値とそのときの P の座標を求めよ．

xy 平面において，次の式が表す曲線を C とする．

$$x^2+4y^2=1,\quad x>0,\quad y>0$$

P を C 上の点とする．P で C に接する直線を ℓ とし，P を通り ℓ と垂直な直線を m として，x 軸と y 軸と m で囲まれてできる三角形の面積を S とする．P が C 上の点全体を動くとき，S の最大値とそのときの P の座標を求めよ．

【テーマ】：楕円の媒介変数表示

方針

まずは，点 P の座標を $\left(\cos\theta,\ \dfrac{1}{2}\sin\theta\right)$ とおき，S を θ を用いて表すことを考えます．

♣ ♠

解答

曲線 C 上の点 P の座標を $\mathrm{P}\left(\cos\theta,\ \dfrac{1}{2}\sin\theta\right)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，直線 ℓ の方程式は，

$$(\cos\theta)x+4\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)y=1 \iff (\cos\theta)x+(2\sin\theta)y=1$$

である．直線 m は点 P を通り，直線 ℓ に垂直なので直線 m の方程式は，

$$2\sin\theta(x-\cos\theta)-\cos\theta\left(y-\frac{1}{2}\sin\theta\right)=0 \iff (2\sin\theta)x-(\cos\theta)y=\frac{3}{2}\sin\theta\cos\theta$$

である．よって，直線 m と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ Q, R とすると，

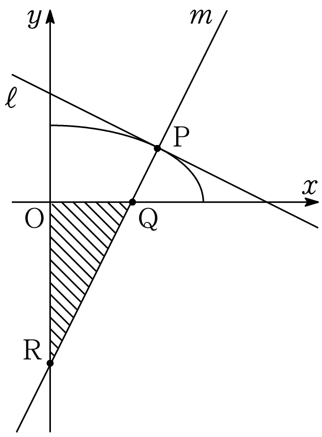
$$\mathrm{Q}\left(\frac{3}{4}\cos\theta,\ 0\right),\quad \mathrm{R}\left(0,\ -\frac{3}{2}\sin\theta\right)$$

ゆえに，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cos\theta\cdot\frac{3}{2}\sin\theta=\frac{9}{32}\sin 2\theta$$

$0<2\theta<\pi$ であるから，$2\theta=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，S は最大値 $\dfrac{9}{32}$ をとる．このとき，P の座標は，$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ となるので，

$$\boldsymbol{S}\ \textbf{の最大値：}\ \boldsymbol{\frac{9}{32}},\quad \mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}},\ \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}}\right)\cdots\cdots(\textbf{答})$$



◇ ♡

解説

まずは，曲線 C 上の点を媒介変数 θ を用いて表すことから始めます．もちろん $\mathrm{P}(a,\ b)$ とおいて解答することもできますが，このように置くと，$a,\ b$ の関係式 $a^2+4b^2=1$ を用いて 1 文字消去をしなければならないため計算が煩雑になります．楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点は，$(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ と置くことができることを知っておくとよいでしょう．

ちなみに，直線 $ax+by+c=0$ に垂直で点 $(x_1,\ y_1)$ を通る直線の方程式は，

$$b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$$

と表すことができます．解答では，直線 m の方程式を用いる際にこのことを利用しています．

初めに赤玉 2 個と白玉 2 個が入った袋がある．その袋に対して以下の試行を繰り返す．

(i) まず同時に 2 個の玉を取り出す．

(ii) その 2 個の玉が同色であればそのまま袋に戻し，色違いであれば赤玉 2 個を袋に入れる．

(iii) 最後に白玉 1 個を袋に追加してかき混ぜ，1 回の試行を終える．

n 回目の試行が終わった時点での袋の中の赤玉の個数を X_n とする．

(1) $X_1 = 3$ となる確率を求めよ．

(2) $X_2 = 3$ となる確率を求めよ．

(3) $X_2 = 3$ であったとき，$X_1 = 3$ である条件つき確率を求めよ．

初めに赤玉 2 個と白玉 2 個が入った袋がある．その袋に対して以下の試行を繰り返す．

(i) まず同時に 2 個の玉を取り出す．

(ii) その 2 個の玉が同色であればそのまま袋に戻し，色違いであれば赤玉 2 個を袋に入れる．

(iii) 最後に白玉 1 個を袋に追加してかき混ぜ，1 回の試行を終える．

n 回目の試行が終わった時点での袋の中の赤玉の個数を X_n とする．

(1) $X_1 = 3$ となる確率を求めよ．

(2) $X_2 = 3$ となる確率を求めよ．

(3) $X_2 = 3$ であったとき，$X_1 = 3$ である条件つき確率を求めよ．

【テーマ】：条件つき確率

方針

(2) では，1 回目に引いた 2 個の玉によって，2 回目以降が変化するため，場合分けが必要になります．

♣ ♠

解答

各回の試行において，(i) で取り出した玉の色によって，袋の中の赤玉と白玉の個数は，次のように変化する．

(ア) (i) で同色の玉を取り出した場合

白玉が 1 個増え，赤玉の個数は変わらない．

(イ) (i) で色違いの玉を取り出した場合

赤玉が 1 個増え，白玉の個数は変わらない．

(1) $X_1 = 3$ となるのは，1 回目に色違いの玉を取り出すときであるから，求める確率は，

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{2}{3}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2) $X_2 = 3$ となるのは，次の場合である．

[1] 1 回目に色違いの玉を取り出し，2 回目に同色の玉を取り出すとき，

(1) の結果から，

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} + \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{10} = \frac{4}{15}$$

[2] 1 回目に同色の玉を取り出し，2 回目に色違いの玉を取り出すとき，

(1) の結果から，

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{{}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10} = \frac{1}{5}$$

[1], [2] より，求める確率は，

$$\frac{4}{15} + \frac{1}{5} = \boldsymbol{\frac{7}{15}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3)　$X_2=3$ となる事象を A，$X_1=3$ となる事象を B とすると，(2) から，

$$P(A)=\frac{7}{15}$$

である．$A\cap B$ は (2) の [1] の場合であるから，

$$P(A\cap B)=\frac{4}{15}$$

である．ゆえに，求める確率は，

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{7}{15}}=\boldsymbol{\frac{4}{7}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇　♡

解説

(3) において，条件つき確率を求めるわけですが，まず『$X_2=3$ であったとき，』と問題文に書かれていることから，これはすでに起こったことを表しています．このように，条件つき確率を考える際には，すでに起こった事実が何なのかを見極めなければいけません．その事実こそが確率を求める際の『**分母**』にくるわけです．あとは，その条件下で $X_1=3$ が起こるわけなので，$X_2=3$ かつ $X_1=3$ となる確率が『**分子**』にきます．公式という認識で式として覚えている人も多いかもしれませんが，条件つき確率の本質をしっかりと理解しておけば，状況が変わったとしても対応できるでしょう．

a は実数とし，2 つの曲線

$$C_1 : y = (x-1)e^x, \quad C_2 : y = \frac{1}{2e}x^2 + a$$

がある．ただし，e は自然対数の底である．C_1 上の点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における C_1 の接線が C_2 に接するとする．

（1） a を t で表せ．

（2） t が実数全体を動くとき，a の極小値，およびそのときの t の値を求めよ．

a は実数とし，2 つの曲線

$$C_1 : y=(x-1)e^x, \quad C_2 : y=\frac{1}{2e}x^2+a$$

がある．ただし，e は自然対数の底である．C_1 上の点 $(t,\,(t-1)e^t)$ における C_1 の接線が C_2 に接するとする．

（1） a を t で表せ．

（2） t が実数全体を動くとき，a の極小値，およびそのときの t の値を求めよ．

【テーマ】：関数の極大極小

方針

(1) は，C_1 上の点 $(t,\,(t-1)e^t)$ における接線を求めて，これが C_2 と接するので，判別式を利用します．(2) は，a を t の関数とみなして，微分して増減表をかき，極値を求めます．

♣ ♠

解答

（1） C_1 において，

$$y'=e^x+(x-1)e^x=xe^x$$

であるから，C_1 上の点 $(t,\,(t-1)e^t)$ における接線の方程式は，

$$y=te^t(x-t)+(t-1)e^t \iff y=te^tx+(-t^2+t-1)e^t$$

これが C_2 と接するとき，

$$\frac{1}{2e}x^2+a=te^tx+(-t^2+t-1)e^t$$

$$x^2+2ea-2ete^tx-2e(-t^2+t-1)e^t=0$$

$$x^2-2ete^tx+2e(t^2-t+1)e^t+2ea=0$$

が，重解をもてばよいので，判別式を D とすると，

$$D/4=(-ete^t)^2-\{2e(t^2-t+1)e^t+2ea\}=0$$

$$t^2e^{2t+2}-2e(t^2-t+1)e^t-2ea=0$$

$$2ea=t^2e^{2t+2}-2e(t^2-t+1)e^t$$

$$a=\frac{t^2e^{2t+2}-2e(t^2-t+1)e^t}{2e}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a=\frac{1}{2}t^2e^{2t+1}-(t^2-t+1)e^t}\cdots\cdots(\text{答})$$

（2） $f(t)=\dfrac{1}{2}t^2e^{2t+1}-(t^2-t+1)e^t$ とおくと，

$$\begin{aligned}f'(t)&=te^{2t+1}+\frac{1}{2}t^2e^{2t+1}\cdot 2-(2t-1)e^t-(t^2-t+1)e^t\\&=(t^2+t)e^{2t+1}-(t^2+t)e^t\\&=t(t+1)(e^{t+1}-1)e^t\end{aligned}$$

$f'(t)=0$ のとき，$t(t+1)=0$ または $e^{t+1}=1$ であるから，$t=0,\,-1$ である．よって，増減表は次のようになる．

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	$-\dfrac{5}{2e}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

よって，**$t=0$ のとき，極小値 -1**……(答)

◇ ♡

解説

(1) は，C_1 上の点における接線の方程式なので公式で求めることができます．C_2 の方程式が放物線なので，直線と放物線が接するということは判別式が利用できます．ちなみに，放物線でなくても楕円や双曲線などの 2 次曲線と直線が接するときは，判別式を利用することができます．

(2) は，a を t の関数とみなして a を t で微分します．増減表をかいて極値を求めますが，その際に注意しないといけないのは，$f'(t)$ の符号です．$f'(t)=0$ の前後で必ずしも符号が変わるとは限らないので，安易に $+$ と $-$ を交互に書かないようにしましょう！符号を見極めるポイントは，$f'(t)$ において，確実に符号がわかるものと t の値によって符号が変化するものを区別します．本問では，$e^t>0$ なので，これは無視し，$t(t+1)(e^{t+1}-1)$ の符号に着目します．次のような表をかくと，符号は一目瞭然です！

		-1		0		t
t	$-$		$-$		$+$	
$t+1$	$-$		$+$		$+$	
$e^{t+1}-1$	$-$		$+$		$+$	
$f'(t)$	$-$		$-$		$+$	

まず，$f'(t)=0$ となる t の値を t 軸上にとります．次に，$f'(t)$ の因数を一つずつ書き込みます．このとき，e^t は正の数なので，無視します．ただし，負の数であれば，書き込んでおいた方が後でミスを防げるでしょう．あとは，『$-$』が奇数個あれば $f'(t)$ の符号は『$-$』ですし，『$-$』が偶数個あれば $f'(t)$ の符号は『$+$』になります．符号で迷ったとき，具体的な値を代入するという手法もありますが，具体的な値を代入することが困難な場合もあります．しかし，この方法は $f'(t)=0$ となる値を求めているわけですから，それぞれの因数の符号は容易に判断できるため汎用性があるでしょう．

正四面体 OABC の 3 頂点 O, A, B の座標が O(0, 0, 0), A(3, 3, 0), B(0, 3, -3) であるとき，以下の各問いに答えよ．

（1） 頂点 C の座標を求めよ．ただし，C の x 座標は正とする．

（2） 2 点 P, Q がそれぞれ線分 OC，線分 AB 上を動くとき，PQ の最小値を求めよ．

正四面体 OABC の 3 頂点 O, A, B の座標が O(0, 0, 0), A(3, 3, 0), B(0, 3, −3) であるとき，以下の各問いに答えよ．

(1) 頂点 C の座標を求めよ．ただし，C の x 座標は正とする．

(2) 2 点 P, Q がそれぞれ線分 OC，線分 AB 上を動くとき，PQ の最小値を求めよ．

【テーマ】：空間ベクトルの演算

方針

(1) は，正四面体という条件から C の座標を決定します．ポイントは，4 つの辺の長さがすべて等しいということです．(2) では，ベクトル方程式を用いて考えます．$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を媒介変数を用いて表すと，2 変数関数の最小値問題に帰着します．

♣ ♠

解答

(1) $\mathrm{C}(p, q, r)$ $(p > 0)$ とおくと，$\mathrm{OC} = \mathrm{AC} = \mathrm{BC} = \mathrm{OA} = \sqrt{18}$ より，

$$\begin{cases} p^2 + q^2 + r^2 = 18 & \cdots\cdots ① \\ (p-3)^2 + (q-3)^2 + r^2 = 18 & \cdots\cdots ② \\ p^2 + (q-3)^2 + (r+3)^2 = 18 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

② − ① より，

$$(p-3)^2 + (q-3)^2 - p^2 - q^2 = 0$$

$-6p + 9 - 6q + 9 = 0$ すなわち $p + q = 3$ ⋯⋯ ④

③ − ② より，

$$p^2 - (p-3)^2 + (r+3)^2 - r^2 = 0$$

$6p - 9 + 6r + 9 = 0$ すなわち $p + r = 0$ ⋯⋯ ⑤

④, ⑤ より，

$$q = 3 - p,\ r = -p$$

これを ③ へ代入して，

$$\begin{aligned} p^2 + p^2 + (-p+3)^2 = 18 &\iff 3p^2 - 6p - 9 = 0 \\ &\iff p^2 - 2p - 3 = 0 \\ &\iff (p-3)(p+1) = 0 \end{aligned}$$

$p > 0$ より，$p = 3$ である．よって，④, ⑤ より，

$$\boldsymbol{(p, q, r) = (3, 0, -3)}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$

ここで，実数 s, t を用いて，

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad (0 < s < 1) \\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad (0 < t < 1) \end{cases}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} - t\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= (3,\ 3,\ 0) + s(-3,\ 0,\ -3) - t(3,\ 0,\ -3) \\ &= (3 - 3s - 3t,\ 3,\ -3s + 3t) \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right| &= \sqrt{(3-3s-3t)^2 + 3^2 + (-3s+3t)^2} \\ &= 3\sqrt{(1-s-t)^2 + 1 + (-s+t)^2} \\ &= 3\sqrt{2s^2 + 2t^2 - 2s - 2t + 2} \\ &= 3\sqrt{2(s^2 - s) + 2t^2 - 2t + 2} \\ &= 3\sqrt{2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 2t^2 - 2t + 2} \\ &= 3\sqrt{2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + 2(t^2 - t) + \frac{3}{2}} \\ &= 3\sqrt{2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

ゆえに，$s = t = \dfrac{1}{2}$ のとき，PQ の最小値は **3**……(答)

◇ ♡

解説

(1) は，正四面体の 4 頂点のうち 3 頂点の座標がわかっているので，1 辺の長さが求められます．これを用いて，C の座標を求めますが，C の座標が与えられていないので，自分で C$(p,\ q,\ r)$ とおかなければいけません．このように自分で文字を設定した場合，未知数の個数だけ式が必要になることを覚えておきましょう！本問では，未知数は $p,\ q,\ r$ の 3 個なので，式を 3 つ作って連立方程式を解けばよいことになります．

(2) は，空間内にある線分上の動点を考えるのでベクトル方程式が有効です．問題文からベクトルを想像することができなかった人もいるかもしれませんが，空間図形で座標が与えられているので，ベクトルがとても役立ちます．ベクトル方程式なので，媒介変数が必要になります．上の解答では $s,\ t$ になります．$s,\ t$ を変化させると PQ の長さが変化するので，$s,\ t$ を変数とする 2 変数関数と考えましょう！あとは，2 変数関数の最小値の求め方を知っているかどうかがポイントとなります．まずは，1 文字を固定（1 文字を定数と考えるということ）して，s の 2 次関数と考えて平方完成します．そうすると最小値が t の式になりますから，今度は固定した文字 t に関する 2 次関数と考えて平方完成して，最小値を求めます．このようにして，PQ の長さの最小値を求めていきます．

次の条件 (*) を満たすような実数 a で最大のものを求めよ.

(*)　$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲のすべての x に対して $\cos x \leqq 1 - ax^2$ が成り立つ.

次の条件 $(*)$ を満たすような実数 a で最大のものを求めよ.

$(*)$ $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲のすべての x に対して $\cos x \leqq 1-ax^2$ が成り立つ.

【テーマ】：不等式の証明

方針

対称性に着目して考えます．$f(x)=1-ax^2-\cos x$ とおいて，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で常に $f(x) \geqq 0$ となるような最大の a の値を求めます.

♣ ♠

解答

$f(x)=1-ax^2-\cos x$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称なので，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で常に $f(x) \geqq 0$ となるような最大の a の値を求めればよい．$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で常に $f(x) \geqq 0$ となるためには，$f(0)=0$ であることから，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \geqq 0$ であることが必要である.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{\pi^2}{4}a \geqq 0 \text{ すなわち } a \leqq \frac{4}{\pi^2}$$

よって，$a=\dfrac{4}{\pi^2}$ のとき，すなわち $f(x)=1-\dfrac{4}{\pi^2}x^2-\cos x$ において，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で常に $f(x) \geqq 0$ であるかどうかを確かめる.

$$f'(x)=-\frac{8}{\pi^2}x+\sin x$$
$$f''(x)=-\frac{8}{\pi^2}+\cos x$$

より，$f''(x)=0$ とすると，$\cos x=\dfrac{8}{\pi^2}$ であり，$0 \leqq \dfrac{8}{\pi^2} \leqq 1$ であるから，$\cos x=\dfrac{8}{\pi^2}$ を満たす x の値は $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲でただ 1 つ存在する．その x の値を α とおく．このとき，$f'(x)$ の増減表は次のようになる.

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$1-\dfrac{4}{\pi}$

$$f'(0)=0$$
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{8}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{2}+1=1-\frac{4}{\pi}<0$$

ゆえに，$\alpha \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$f'(x)=0$ となる x の値がただ 1 つ存在する．その x の値を β とおく.
このとき，$f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

ゆえに，$a=\dfrac{4}{\pi^2}$ のとき，$f(x) \geqq 0$ となるので，a の値の最大値は，$\boldsymbol{a=\dfrac{4}{\pi^2}}$……(答)

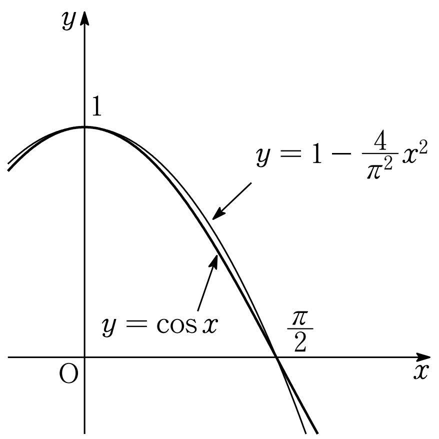
♢ ♡

解説

本問は，解答にあるように先に必要条件を求め，その十分性を確認するという方針で解くと解き易くなります．この考え方は，一度経験していないと難しいと感じるかもしれませんが非常に大切な考え方です．

必要条件を求めるというのをもう少し詳しく説明しましょう．条件 $(*)$ を満たすような a の値で最大のものを考えたいので，まず，方針 や 解答 の始めにあるように，対称性を用いて，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で常に $f(x) \geqq 0$ となるときを考えます．ここで，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で常に $f(x) \geqq 0$ となるためには，**少なくとも** $f(0) \geqq 0$ や $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \geqq 0$ が成り立っていなければいけません．これが必要条件です．（条件を満たすために**最低限必要な条件**ということです．）$f(0) = 0$ なので，これは大丈夫ですが，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ は a を含む式になりますから，この値が少なくとも 0 以上でなければいけません．ただし，これは定義域の両端を調べたに過ぎませんから，間の値でも常に 0 以上になるという保障はありません．これを保障するために（十分性を確認するために）$a = \dfrac{4}{\pi^2}$ として，本当に $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で常に $f(x) \geqq 0$ となっているかどうかを確認する必要があります．

グラフをかくと様子がわかりますが，$y = \cos x$ と $y = 1 - ax^2$ $(a > 0)$ のグラフはどちらも考えている区間では上に凸で，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で単調減少です．かなり，似た形をしているため，自分でかいたグラフでは判断つきません．コンピュータを用いないとどちらが上にあるかはわからないですよね？だから十分性の確認は必要不可欠です．明らかな場合でも一言触れる必要はあります．（ちゃんと考えているアピールをしましょう！）下図は，細線が $y = 1 - \dfrac{4}{\pi^2}x^2$ のグラフで，太線が $y = \cos x$ のグラフです．



数列 $\{a_n\}$ を $a_k = k + \cos\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$ で定める．n を正の整数とする．

（1） $\displaystyle\sum_{k=1}^{12n} a_k$ を求めよ．

（2） $\displaystyle\sum_{k=1}^{12n} {a_k}^2$ を求めよ．

数列 $\{a_n\}$ を $a_k = k + \cos\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$ で定める．n を正の整数とする．

（1） $\displaystyle\sum_{k=1}^{12n} a_k$ を求めよ．

（2） $\displaystyle\sum_{k=1}^{12n} {a_k}^2$ を求めよ．

【テーマ】：三角関数と和

方針

三角関数の周期性に着目します．$\cos\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$ において，$k = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ としてみると周期性が見えてくるでしょう．

♣ ♠

解答

（1） 与えられた a_k において，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{12n} a_k &= \sum_{k=1}^{12n}\left\{k + \cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{2}\cdot 12n(12n+1) + \sum_{k=1}^{12n}\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)\\ &= 6n(12n+1) + \sum_{k=1}^{12n}\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right) \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

である．ここで，

$$\cos\left(\frac{k+12}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{k\pi}{6}\right),\quad \cos\left(\frac{k+6}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)$$

が成り立つので，数列 $\left\{\cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)\right\}$ は，周期が 12 の周期数列である．よって，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{12n}\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right) &= n\sum_{k=1}^{12}\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)\\ &= n\left\{\sum_{k=1}^{6}\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right) + \sum_{k=1}^{6}\cos\left(\frac{k+6}{6}\pi\right)\right\}\\ &= n\left\{\sum_{k=1}^{6}\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right) - \sum_{k=1}^{6}\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)\right\} = 0 \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

であるから，①, ② より，

$$\sum_{k=1}^{12n} a_k = \boldsymbol{6n(12n+1)}\cdots\cdots\text{(答)}$$

（2） ${a_k}^2 = k^2 + 2k\cos\left(\dfrac{k\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$ であるから，

$$\sum_{k=1}^{12n} {a_k}^2 = \sum_{k=1}^{12n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{12n} k\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right) + \sum_{k=1}^{12n}\cos^2\left(\frac{k\pi}{6}\right)$$

ここで，

$$\sum_{k=1}^{12n} k^2 = \frac{1}{6}\cdot 12n(12n+1)(24n+1) = 2n(12n+1)(24n+1)$$

$l = 1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ に対して，

$$\begin{aligned}\sum_{k=12(l-1)+1}^{12l} k\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right) &= (12l-11)\cos\frac{\pi}{6}+(12l-10)\cos\frac{2\pi}{6}+(12l-9)\cos\frac{3\pi}{6}\\ &\quad +(12l-8)\cos\frac{4\pi}{6}+(12l-7)\cos\frac{5\pi}{6}+(12l-6)\cos\frac{6\pi}{6}\\ &\quad +(12l-5)\cos\frac{7\pi}{6}+(12l-4)\cos\frac{8\pi}{6}+(12l-3)\cos\frac{9\pi}{6}\\ &\quad +(12l-2)\cos\frac{10\pi}{6}+(12l-1)\cos\frac{11\pi}{6}+12l\cos\frac{12\pi}{6}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(12l-11)+\frac{1}{2}(12l-10)\\ &\quad -\frac{1}{2}(12l-8)-\frac{\sqrt{3}}{2}(12l-7)-(12l-6)\\ &\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}(12l-5)-\frac{1}{2}(12l-4)\\ &\quad +\frac{1}{2}(12l-2)+\frac{\sqrt{3}}{2}(12l-1)+12l\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(12l-11-12l+7-12l+5+12l-1)\\ &\quad +\frac{1}{2}(12l-10-12l+8-12l+4+12l-2)\\ &\quad -12l+6+12l\\ &= 6\end{aligned}$$

となるので，$\displaystyle\sum_{k=1}^{12n} k\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)=6n$ である．

また，数列 $\left\{\cos^2\left(\frac{k\pi}{6}\right)\right\}$ は周期が 6 の周期数列であるから，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{12n}\cos^2\left(\frac{k\pi}{6}\right) &= 2n\sum_{k=1}^{6}\cos^2\left(\frac{k\pi}{6}\right)\\ &= 2n\left(\cos^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{2\pi}{6}+\cos^2\frac{3\pi}{6}+\cos^2\frac{4\pi}{6}+\cos^2\frac{5\pi}{6}+\cos^2\frac{6\pi}{6}\right)\\ &= 2n\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+1\right)\\ &= 2n(2+1)=6n\end{aligned}$$

以上より，求める和は，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{12n} {a_k}^2 &= 2n(12n+1)(24n+1)+12n+6n\\ &= 2n\{(12n+1)(24n+1)+9\}\\ &= \boldsymbol{4n(144n^2+18n+5)}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

◇ ♡

解説

三角関数は，周期関数です．$f(x)=\cos x$ のとき，$f(x+2\pi)=f(x)$ が成り立つためです．三角関数の和を考える場合は，これに着目します．一般に $\cos x$ の周期は 2π であり，$\cos kx$ の周期は $\dfrac{2\pi}{k}$ となります．今回は，$\cos\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$ となっているので，周期が $\dfrac{2\pi}{\frac{k}{6}}=12$ となります．したがって，和を考える際は，12 個の和をセットで考えるとそれの繰り返しになります．問題文の $\sum$ の上端の値が $12n$ なのはそのためです．(2) では，${a_k}^2$ を計算して，それぞれの項の和を考えますが，ここでも同様に周期に着目します．周期がわからない場合は，少し書き出してみれば周期がわかるでしょう．

i を虚数単位，r を 1 より大きい実数とし，$w=r\left(\cos\dfrac{\pi}{24}+i\sin\dfrac{\pi}{24}\right)$ とおく．また，数列 $\{z_n\}$ を次の式で定める．

$$z_1=w,\quad z_{n+1}=z_nw^{n+2}\quad(n=1,\,2,\,3,\,\cdots\cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1)　z_2 を r を用いて表せ．

(2)　z_n の偏角の 1 つを n を用いて表せ．

(3)　複素数平面で原点を O，z_n で表される点を P_n とする．$7\leqq n\leqq 48$ のとき，$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1}$ が $\angle\mathrm{O}=\dfrac{\pi}{3}$ を満たす直角三角形となるような n と r をそれぞれ求めよ．また，そのときの z_n の偏角 θ を $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で求めよ．

i を虚数単位，r を 1 より大きい実数とし，$w = r\left(\cos\dfrac{\pi}{24} + i\sin\dfrac{\pi}{24}\right)$ とおく．また，数列 $\{z_n\}$ を次の式で定める．

$$z_1 = w,\quad z_{n+1} = z_n w^{n+2}\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1)　z_2 を r を用いて表せ．

(2)　z_n の偏角の 1 つを n を用いて表せ．

(3)　複素数平面で原点を O，z_n で表される点を P_n とする．$7 \leqq n \leqq 48$ のとき，$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1}$ が $\angle \mathrm{O} = \dfrac{\pi}{3}$ を満たす直角三角形となるような n と r をそれぞれ求めよ．また，そのときの z_n の偏角 θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で求めよ．

【テーマ】：複素数の図形への応用

方針

(1) は，漸化式より z_2 を求め，ド・モアブルの定理を用います．(2) は，漸化式を解くことで，z_n を求めればよい．(3) は，指定された直角三角形を作るために図をかいて考えます．

♣　♠

解答

(1)　与えられた漸化式より，

$$\begin{aligned}
z_2 &= z_1 w^3 = w^4 \\
&= r^4\left(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}\right)^4 = r^4\left(\cos\frac{4\pi}{24} + i\sin\frac{4\pi}{24}\right) \\
&= r^4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = r^4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}+i}{2}r^4}\cdots\cdots\text{(答)}
\end{aligned}$$

(2)　与えられた漸化式より，

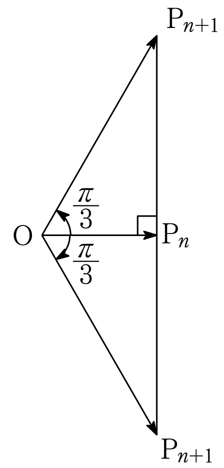
$$\begin{aligned}
z_n &= z_{n-1}w^{n+1} = z_{n-2}w^n \cdot w^{n+1} \\
&= z_{n-3}w^{n-1} \cdot w^n \cdot w^{n+1} \\
&= \cdots\cdots \\
&= z_1 \cdot w^3 \cdots\cdots w^{n-1} \cdot w^n \cdot w^{n+1} = w \cdot w^3 \cdots\cdots w^{n-1} \cdot w^n \cdot w^{n+1} \\
&= w^{1+3+\cdots\cdots+(n-1)+n+(n+1)} = w^{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-2} \\
&= w^{\frac{n^2+3n-2}{2}} \\
&= r^{\frac{n^2+3n-2}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}\right)^{\frac{n^2+3n-2}{2}} \\
&= r^{\frac{n^2+3n-2}{2}}\left(\cos\frac{n^2+3n-2}{48}\pi + i\sin\frac{n^2+3n-2}{48}\pi\right)
\end{aligned}$$

よって，求める偏角の 1 つは，

$$\boldsymbol{\frac{n^2+3n-2}{48}\pi}\cdots\cdots\text{(答)}$$

(3)　$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1}$ が $\angle \mathrm{O}=\dfrac{\pi}{3}$ の直角三角形になるとき，$r>1$ より，

$$|z_{n+1}|=|z_n w^{n+2}|=r^{n+2}|z_n|>|z_n|$$



であるから，$\mathrm{OP}_{n+1}=2\mathrm{OP}_n$ である．よって，

$$|z_{n+1}|=2|z_n| \text{ かつ } \angle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1}=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{（k は整数）}$$

が成り立つ．$\angle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1}=\arg\dfrac{z_{n+1}}{z_n}=\arg w^{n+2}$ であるから，

$$\begin{aligned}\arg w^{n+2}&=\arg\left\{r^{n+2}\left(\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}\right)^{n+2}\right\}\\&=\arg\left\{r^{n+2}\left(\cos\frac{(n+2)\pi}{24}+i\sin\frac{(n+2)\pi}{24}\right)\right\}\end{aligned}$$

であることから，

$$\arg w^{n+2}=\frac{(n+2)\pi}{24}$$

である．すなわち，

$$\frac{(n+2)\pi}{24}=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{（k は整数）} \cdots\cdots ①$$

である．ここで，$7\leqq n\leqq 48$ より，

$$\frac{9}{24}\pi\leqq\frac{n+2}{24}\pi\leqq\frac{50}{24}\pi \iff \frac{3}{8}\pi\leqq\frac{n+2}{24}\pi\leqq\frac{25}{12}\pi$$

であるから，① が成り立つとき，$0\leqq\dfrac{n+2}{24}\pi<2\pi$ で考えると，

$$\frac{n+2}{24}\pi=\frac{5}{3}\pi \text{ すなわち } n=38$$

である．このとき，r の値は，$|z_{n+1}|=2|z_n|$ すなわち $\dfrac{|z_{n+1}|}{|z_n|}=r^{n+2}=2$ より，

$$r^{40}=2 \text{ すなわち } r=\sqrt[40]{2}$$

である．このときの z_n の偏角 θ は (2) より，

$$\theta=\arg z_{38}=\frac{38^2+3\cdot 38-2}{48}\pi=32\pi+\frac{5}{12}\pi$$

である．以上より，求める n, r, θ の値は，

$$\boldsymbol{n=38,\quad r=\sqrt[40]{2},\quad \theta=\frac{5}{12}\pi}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

◇　♡

解説

(1) は，与えられた漸化式より z_2 を計算し，『ド・モアブルの定理』が使えることに気付けば，容易に求められます．

(2) は，漸化式を解くことになりますが，解答にあるように一つずつ n を下げて具体的に書き出すと計算の仕組みがわかってきます．公式のように漸化式を解く練習だけをしている人には少し難しい問題かもしれません．漸化式の仕組みを理解していれば解答できます．

(3) は，図形の問題です．まずは問題になっている直角三角形の各頂点の角度がいくらになるかを考えます．本問では，$\angle \mathrm{O}=\dfrac{\pi}{3}$ と与えられているので，$|z_{n+1}|=2|z_n|$ または $2|z_{n+1}|=|z_n|$ が考えられますが，解答にもあるように，$|z_{n+1}|>|z_n|$ が導かれるため三角形の形状は 1 つに決まります．あとは，偏角の計算と辺の比から n, r, θ を求めていきます．

直線 $y = px + q$ が，$y = x^2 - x$ のグラフとは交わるが，$y = |x| + |x - 1| + 1$ のグラフとは交わらないような $(p,\ q)$ の範囲を図示し，その面積を求めよ．

直線 $y=px+q$ が，$y=x^2-x$ のグラフとは交わるが，$y=|x|+|x-1|+1$ のグラフとは交わらないような $(p,\, q)$ の範囲を図示し，その面積を求めよ.

【テーマ】：交点をもつ条件・もたない条件

方針

$y=px+q$ と $y=x^2-x$ のグラフが共有点をもつ場合は，判別式で処理できます．$y=px+q$ と $y=|x|+|x-1|+1$ のグラフが共有点をもたない場合は，後者のグラフをかいて考えます.

♣ ♠

解答

$y=px+q$ と $y=x^2-x$ のグラフが共有点をもつとき，

$$px+q=x^2-x \iff x^2-(p+1)x-q=0$$

の判別式を D とすると，$D \geqq 0$ であればよいので，

$$D=(p+1)^2+4q \geqq 0 \iff q \geqq -\frac{1}{4}(p+1)^2 \cdots\cdots ①$$

次に，$y=px+q$ と $y=|x|+|x-1|+1$ のグラフが共有点をもたないときを考える.

まず，$y=|x|+|x-1|+1$ について，

(i) $x<0$ のとき，

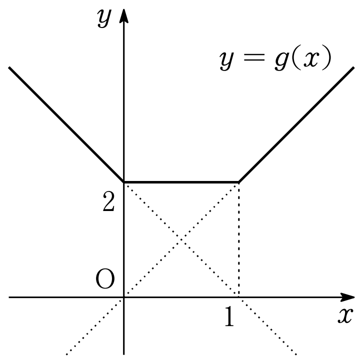
$$y=-x-(x-1)+1=-2x+2$$

(ii) $0 \leqq x<1$ のとき，

$$y=x-(x-1)+1=2$$

(iii) $x \geqq 1$ のとき，

$$y=x+(x-1)+1=2x$$



であるから，$y=|x|+|x-1|+1$ のグラフは右図のようになる.

$f(x)=px+q$, $g(x)=|x|+|x-1|+1$ とおくと，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフが共有点をもたないための必要条件は，

$$f(0)<g(0) \text{ かつ } f(1)<g(1)$$

より，

$$q<2 \text{ かつ } p+q<2$$

である．また，$p>2$ または $p<-2$ に対しては，十分大きな x または十分小さな x に対して，$f(x)>g(x)$ となる x が存在するため不適．したがって，

$$-2 \leqq p \leqq 2$$

である.

以上より，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフが共有点をもたないための必要十分条件は，

$$q<2 \text{ かつ } p+q<2 \text{ かつ } -2 \leqq p \leqq 2 \cdots\cdots ②$$

である．

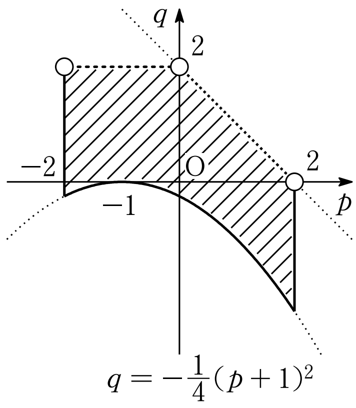
　ゆえに，求める条件は，① かつ ② であるから，

右図斜線部分である．境界線上の点は，

$$q=2 \quad (-2 \leqq p \leqq 0), \quad p+q=2$$

は含まず，他は含む．

また，その面積を S とすると，



$$\begin{aligned} S &= (2+4)\cdot 2\cdot\frac{1}{2}+\int_{-2}^{2}\left\{-\left(-\frac{1}{4}(p+1)^2\right)\right\}dp \\ &= 6+\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(p+1)^2\,dp \\ &= 6+\frac{1}{4}\left[\ \frac{1}{3}(p+1)^3\ \right]_{-2}^{2} \\ &= 6+\frac{1}{12}\{3^3-(-1)^3\} \\ &= 6+\frac{7}{3}=\boldsymbol{\frac{25}{3}}\cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

◇ ♡

解説

　$y=px+q$ と $y=|x|+|x-1|+1$ のグラフが共有点をもたないときは，判別式のような道具がないので，グラフを考えます．$y=|x|+|x-1|+1$ のグラフは折れ線になるので，直線 $y=px+q$ が共有点をもたないためには，最低でも $x=0, x=1$ のときに $g(2)=1$ よりも小さいことが必要になります．これが必要条件です．また，$x<0, 2<x$ の部分の傾きが 2 なので，$y=px+q$ の傾きが 2 より大きかったり -2 より小さかったりすると x の値を十分大きくとったり，十分小さくとったりすると，必ず $y=px+q$ と $y=|x|+|x-1|+1$ のグラフは共有点をもつことになります．したがって，$-2\leqq p\leqq 2$ という条件を付け加える必要があります．これが十分性の確認です．

　面積の計算は，$q\geqq 0$ と $q\leqq 0$ に分けて考えています．$q\geqq 0$ の部分は，台形なのでその面積は，

$$(2+4)\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=6$$

となります．また，$q\leqq 0$ の部分は，放物線と x 軸で囲まれた部分の面積なので，

$$\int_{-2}^{2}\left\{-\left(-\frac{1}{4}(p+1)^2\right)\right\}dp$$

となります．面積計算は上手に領域を分割することで楽に計算できる場合があるので，色々な問題を通して経験を積んでおきましょう．