【問題】

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{1+x}\,dx$ を求めよ.

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{1+x}\,dx$ を求めよ．

【テーマ】：積分不等式

方針

極限はとりあえず無視して，まずは積分部分を何とかしてみましょう．$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{1+x}\,dx$ とおいて，積分計算を行います．しかし，この積分の値は求めることができないので，ある程度計算したら，この積分を不等式を使って評価しなければいけません．

素直に積分が計算できればよいのですが，この積分は計算できません．そこで，不等式を使ってこの積分を評価する必要があります．（評価するとは，簡単にいえば不等式を立式するということです．）積分の値が求められない極限はこの不等式による評価をしてはさみうちの原理を利用します．積分不等式を立式する際には，積分区間$\left(\text{本問では } 0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$で成り立つ不等式をまず探すことから始めます．

ポイント

積分不等式を作るときは，積分区間に着目して不等式を立式する

♣ ♠

解答

$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{1+x}\,dx$ とおくと，

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{2}(1-\cos 2nx)}{1+x}\,dx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+x}\,dx-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2nx}{1+x}\,dx\\
&= \frac{1}{2}\Big[\log|1+x|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2nx}{1+x}\,dx\\
&= \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2nx}{1+x}\,dx
\end{aligned}$$

ここで，$J_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2nx}{1+x}\,dx$ とおくと，

$$\begin{aligned}
J_n &= \left[\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2n}\cdot\sin 2nx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{2n(1+x)^2}\,dx\\
&= \frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{(1+x)^2}\,dx
\end{aligned}$$

$-1\leqq\sin 2nx\leqq 1$ より，

$$-\frac{1}{(1+x)^2}\leqq\frac{\sin 2nx}{(1+x)^2}\leqq\frac{1}{(1+x)^2}$$

が成り立つので，

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+x)^2}\,dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{(1+x)^2}\,dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+x)^2}\,dx$$

$$-\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+x)^2}\,dx \leqq \frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{(1+x)^2}\,dx \leqq \frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+x)^2}\,dx$$

となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+x)^2}\,dx=0$ となることから，はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}J_n=0$ となる．よって，

$$\lim_{n\to\infty}I_n=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)}\cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

この問題の難しいところは，積分不等式の立式です．与えられた積分から作ってもはさみうちの原理で値が絞れないので，ある程度式を変形する必要があるのです．では，どうやってこのような解答を思いつけばよいのでしょうか？ある程度の経験が必要ですが，もちろんいくつかのポイントがあるので，そこを一つ一つ押さえていくことが大切なのです．では，どのような思考回路でこの解答ができあがるかをシミュレーションしてみましょう．

思考回路（その１）

まずは，積分を計算してみよう！！…求められない…最終的には極限値が聞かれているから，これははさみうちの原理を利用するのかな？もしもはさみうちの原理を利用するのなら不等式で評価しないといけないからまずは不等式を作ってみよう！積分不等式を作る元になる不等式は，積分区間で成り立つようなものを作らないといけないから，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で不等式を作ろう！！ $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で $0\leqq\sin^2 nx\leqq 1$ となるので，$0\leqq\dfrac{\sin^2 nx}{1+x}\leqq\dfrac{1}{1+x}$ となるなぁ…あれ！？まてよ，これじゃあ積分不等式を作っても最右辺に n がないから，はさみうちの原理が使えない…このままでは，駄目かぁ…じゃあ積分を少し計算するしかないか…

という具合で，まずは積分を計算しようという思考に至ります．では，続きを…

思考回路（その２）

積分計算をするときは，積より和の形が基本だから，まずは

$$\sin^2 nx=\frac{1-\cos 2nx}{2}$$

とするのが自然だな！次は，少しだけ計算できる部分が出てきたから計算しちゃえ！（もしも駄目ならやり直せばいいし…）

$$I_n=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2nx}{1+x}\,dx$$

ここまで来たけど，最後の積分計算はやっぱりできない形だなぁ〜…しかもこれで不等式作ってもさっきと同じで n なんて出てこないしなぁ〜…

さて，ここで一端手が止まってしまうはずです．ここからの発想が大切！！

思考回路（その３）

なんとかして $\dfrac{1}{n}$ ってのが出せれば，はさみうちの原理が使えるんだけどなぁ〜…んっ！？ $\cos 2nx$ って積分したら $\dfrac{1}{2n}\sin 2nx$ じゃん！そうか！ってことはここで部分積分を使えば，n が分母に現れる！！よし，やってみよう！

$$J_n=\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{(1+x)^2}\,dx$$

やっぱり！ n が分母に来たぞ！あとは，不等式を作って，積分不等式に持っていけばできそうだなぁ！！

ってな具合になります．後は積分不等式を勉強している人なら，解答の流れが自然にでてくるでしょう．でてこない人は積分不等式の勉強不足ですからこれから演習を積んでください．

【問題】

自然数 x, y を用いて $p^2 = x^3 + y^3$ と表せるような素数 p をすべて求めよ．また，このときの x, y をすべて求めよ．

自然数 $x,\, y$ を用いて $p^2=x^3+y^3$ と表せるような素数 p をすべて求めよ．また，このときの $x,\, y$ をすべて求めよ．

【テーマ】：素数問題

方針

因数分解をして，素数の性質を利用します．

ある自然数の約数が 1 とそれ自身しかないとき，その自然数を素数といいます．この素数の性質を利用して解く問題です．すなわち $a,\, b$ が自然数で，p が素数であるとき，

$$p=a\times b$$

と表されるならば，$(a,\, b)=(1,\, p)$ または $(p,\, 1)$ の 2 通りしか考えられません．また，

$$p^2=a\times b$$

と表されるならば，$(a,\, b)=(1,\, p^2)$ または $(p,\, p)$ または $(p^2,\, 1)$ の 3 通りしか考えられません．本問ではこれを利用します．

ポイント

素数の性質を利用するために因数分解をする

♣ ♠

解答

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ であるから，

$$p^2=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

ここで，$x,\, y$ は自然数であることから，$x+y>1$ となるので，p が素数であることより，

$$\text{(i)}\quad \begin{cases} x+y=p \\ x^2-xy+y^2=p \end{cases} \qquad \text{(ii)}\quad \begin{cases} x+y=p^2 \\ x^2-xy+y^2=1 \end{cases}$$

である．

(i) のとき，

$$\begin{aligned} x^2-xy+y^2=p \quad &\Longleftrightarrow \quad (x+y)^2-3xy=p \\ &\Longleftrightarrow \quad p^2-3xy=p \\ &\Longleftrightarrow \quad xy=\frac{p^2-p}{3} \end{aligned}$$

よって，解と係数の関係から，$x,\, y$ は次の 2 次方程式の解となる．

$$t^2-pt+\frac{p^2-p}{3}=0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3t^2-3pt+p^2-p=0$$

$x,\, y$ は自然数であることから，判別式を D_1 とすると，

$$D_1=9p^2-4\cdot 3\cdot (p^2-p)\geqq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p(p-4)\leqq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0\leqq p\leqq 4$$

p は素数であるから，$p=2,\ 3$ である．
$p=2$ のとき，

$$3t^2-6t+2=0 \text{ より，} t=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$$

となるので不適．
$p=3$ のとき，

$$3t^2-9t+6=0 \iff (t-1)(t-2)=0$$

となるので，$t=1,\ 2$ であり，これは題意をみたす．
（ii）のとき，

$$\begin{aligned} x^2-xy+y^2=1 &\iff (x+y)^2-3xy=1 \\ &\iff p^4-3xy=1 \\ &\iff xy=\frac{p^4-1}{3} \end{aligned}$$

よって，解と係数の関係から，$x,\ y$ は次の 2 次方程式の解となる．

$$t^2-p^2t+\frac{p^4-1}{3}=0 \iff 3t^2-3p^2t+p^4-1=0$$

$x,\ y$ は自然数であることから，判別式を D_2 とすると，

$$D_2=9p^4-4\cdot3\cdot(p^4-1)\geqq0 \iff p^4-4\leqq0 \iff 0\leqq p^2\leqq2$$

p は素数であるから，これをみたす p は存在しない．ゆえに，求める素数 p と $x,\ y$ は，

$$\boldsymbol{p=3,\ (x,\ y)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)}\cdots\cdots\text{（答）}$$

◇ ♡

解説

素数に関する問題を解くためには，素数の性質をしっかりと理解しておく必要があります．本問は，因数分解をして解くという意味では不定方程式の因数分解型に非常によく似ていますが，p の値がわからないので，どのようにして p の値を絞り込むかという部分が難しいでしょう．$x+y,\ xy$ を p を用いて表すことができたなら解と係数の関係を思い出して，自然数である $x,\ y$ が存在するための p の条件を導き出しましょう．この考え方は，通過領域の問題などにも出てくるので，様々な場面で使う解法手段ですから，しっかりと身につけておきましょう．
ここで，次のような疑問を持つ人がいるかもしれません．

$x,\ y$ は自然数なのに何で判別式をとるの？

実際に，よく受ける質問です．ここで重要なのは，最低限必要な条件を求めなければならないということです．自然数は実数の一部であるという認識が必要になります．つまり，$x,\ y$ が自然数なら t の 2 次方程式は実数解をもたなければならないということです．もちろんこれは必要条件にすぎません．ですから，そのあとで十分性を確認するため，$p=2,\ 3$ のときで題意をみたすかどうかを調べているのです．

n を自然数とする．

$$S_n = \frac{1^2}{\sqrt{1^3+1}} + \frac{2^2}{\sqrt{2^3+1}} + \frac{3^2}{\sqrt{3^3+1}} + \cdots\cdots + \frac{n^2}{\sqrt{n^3+1}}$$

について，次の問いに答えよ．

（1） $x \geqq 1$ のとき，関数 $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$ は単調増加でかつ上に凸であることを示せ．

（2） $\displaystyle\int_1^{n+1} f(x)\,dx$ を求めよ．

（3） p を正の実数とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^p}$ が収束するように p の値を定め，その極限値を求めよ．

n を自然数とする．

$$S_n=\frac{1^2}{\sqrt{1^3+1}}+\frac{2^2}{\sqrt{2^3+1}}+\frac{3^2}{\sqrt{3^3+1}}+\cdots\cdots+\frac{n^2}{\sqrt{n^3+1}}$$

について，次の問いに答えよ．

(1)　$x \geqq 1$ のとき，関数 $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$ は単調増加でかつ上に凸であることを示せ．

(2)　$\displaystyle\int_1^{n+1} f(x)\,dx$ を求めよ．

(3)　p を正の実数とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^p}$ が収束するように p の値を定め，その極限値を求めよ．

【テーマ】：区分求積法

方針

(1) は素直に微分して $f'(x)>0$, $f''(x)<0$ を示しましょう．(2) は置換積分を用いて定積分します．(3) は難問です．$\dfrac{S_n}{n^p}$ を計算したいのですが，実際に計算することができないので，不等式を用いて評価します．あとは，はさみうちの原理を用いて，収束するための p の条件を求めます．

(1), (2) は標準的な問題なので，完答したい問題です．本問は (3) をどのようにして解くかで悩むでしょう．まずは，形をみて区分求積法に気付いてほしいのですが，もしもそれに気付いたとしても収束条件まで持っていくにはかなりの経験と知識が必要です．この分野が頻出の大学を受験する人は，しっかりと復習をして，類題が解けるようになっておきましょう．

ポイント

和が求められないときは，区分求積法を利用してみる！

♣ ♠

解答

(1)　**【証明】**

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x\sqrt{x^3+1}-x^2\cdot\frac{1}{2}(x^3+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3x^2}{x^3+1}\\
&= \frac{2x\sqrt{x^3+1}-\frac{3}{2}x^4\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}}{x^3+1}\\
&= \frac{2x(x^3+1)-\frac{3}{2}x^4}{(x^3+1)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{x^4+4x}{2(x^3+1)^{\frac{3}{2}}}>0 \quad (\because\ x\geqq 1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(4x^3+4)(x^3+1)^{\frac{3}{2}}-(x^4+4x)\cdot\frac{3}{2}(x^3+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 3x^2}{2(x^3+1)^3}\\
&= \frac{4(x^3+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{9}{2}x^3(x^3+4)(x^3+1)^{\frac{1}{2}}}{2(x^3+1)^3}\\
&= \frac{(x^3+1)^{\frac{1}{2}}\{8(x^3+1)^2-9x^3(x^3+4)\}}{4(x^3+1)^3}\\
&= \frac{(x^3+1)^{\frac{1}{2}}\{8(x^6+2x^3+1)-9x^6-36x^3\}}{4(x^3+1)^3}\\
&= \frac{(x^3+1)^{\frac{1}{2}}(-x^6-20x^3+8)}{4(x^3+1)^3}\\
&= \frac{(x^3+1)^{\frac{1}{2}}\{-(x^3+10)^2+108\}}{4(x^3+1)^3}<0 \quad (\because\ x \geqq 1)
\end{aligned}
$$

ゆえに，$x \geqq 1$ のとき，$f'(x)>0$，$f''(x)<0$ であるから，関数 $f(x)$ は $x \geqq 1$ で単調増加でかつ上に凸であることが示された.

(証明終)……(答)

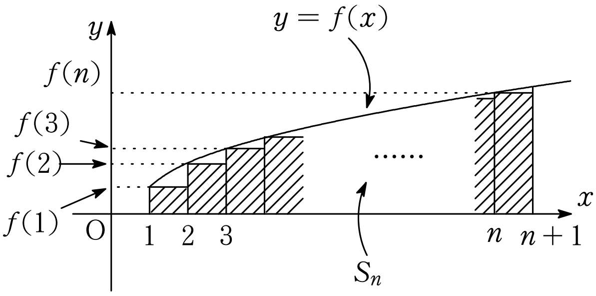
(2)　$x^3+1=t$ とおくと，$3x^2\,dx=dt$ であり，

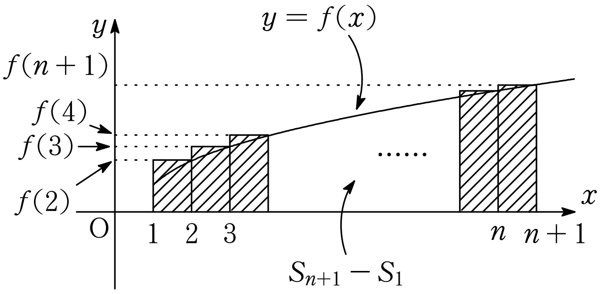
x	$1 \to n+1$
t	$2 \to (n+1)^3+1$

であるから，

$$
\begin{aligned}
\int_1^{n+1}\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx &= \int_2^{(n+1)^3+1}\frac{1}{3\sqrt{t}}\,dt\\
&= \frac{1}{3}\int_2^{(n+1)^3+1} t^{-\frac{1}{2}}\,dt\\
&= \frac{1}{3}\Big[\,2t^{\frac{1}{2}}\,\Big]_2^{(n+1)^3+1}\\
&= \boldsymbol{\frac{2}{3}\left(\sqrt{(n+1)^3+1}-\sqrt{2}\right)}\text{……(答)}
\end{aligned}
$$

(3)　$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(k)$ であり，(1) より $x \geqq 1$ で $y=f(x)$ のグラフは単調増加でかつ上に凸であるから，S_n と $\int_1^{n+1} f(x)\,dx$ の関係は，次の 2 つのグラフから次のようになる.





$$S_n<\int_1^{n+1} f(x)\,dx<S_{n+1}-S_1 \quad \text{……①}$$

ここで，$S_{n+1}-S_1=S_n+\dfrac{(n+1)^2}{\sqrt{(n+1)^3+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから，

$$① \iff \int_1^{n+1} f(x)\,dx-\frac{(n+1)^2}{\sqrt{(n+1)^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}<S_n<\int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

となるので，(2) の結果を用いると，

$$\frac{2}{3}\left(\sqrt{(n+1)^3+1}-\sqrt{2}\right)-\frac{(n+1)^2}{\sqrt{(n+1)^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}<S_n<\frac{2}{3}\left(\sqrt{(n+1)^3+1}-\sqrt{2}\right)$$

$$\iff \frac{2}{3n^p}\left(\sqrt{(n+1)^3+1}-\sqrt{2}\right)-\frac{(n+1)^2}{n^p\sqrt{(n+1)^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{2}n^p}<\frac{S_n}{n^p}<\frac{2}{3n^p}\left(\sqrt{(n+1)^3+1}-\sqrt{2}\right)$$

$$\iff \frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(\frac{n+1}{n^{\frac{2}{3}p}}\right)^3+\frac{1}{n^{2p}}}-\frac{\sqrt{2}}{n^p}\right)-\frac{(n+1)^2}{\sqrt{\left(n^{\frac{2}{3}p+1}+n^{\frac{2}{3}p}\right)^3+n^{2p}}}+\frac{1}{\sqrt{2}n^p}$$

$$<\frac{S_n}{n^p}<\frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(\frac{n+1}{n^{\frac{2}{3}p}}\right)^3+\frac{1}{n^{2p}}}-\frac{\sqrt{2}}{n^p}\right)$$

と変形することができる．

ここで，

（ⅰ） $p=\dfrac{3}{2}$ のとき，

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}\right)-\frac{(n+1)^2}{\sqrt{(n^2+n)^3+n^3}}+\frac{1}{\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}\right)-\frac{(n+1)^2}{\sqrt{n^6\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+n^3}}+\frac{1}{\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}\right)-\frac{n^2+2n+1}{n^3\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}}}+\frac{1}{\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}\right)-\frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}}}+\frac{1}{\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

となるので，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}\right)-\frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}}}+\frac{1}{\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}}}\right\}=\frac{2}{3}$$

同様にすると，右辺は

$$(\text{右辺})=\frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

となるので，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}}-\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right\}=\frac{2}{3}$$

よって，このとき，はさみうちの原理によって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^p}$ は収束し，その極限値は $\dfrac{2}{3}$ となる．

（ii）　$p>\dfrac{3}{2}$ のとき，

（ｉ）を踏まえて考えると，$n\to\infty$ のとき，

$$(\text{左辺})\to 0\ ,\ (\text{右辺})\to 0$$

となるので，はさみうちの原理によって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^p}$ は収束し，その極限値は 0 となる．

（iii）　$0<p<\dfrac{3}{2}$ のとき，

（ｉ）を踏まえて考えると，$n\to\infty$ のとき，

$$(\text{左辺})\to\infty$$

となるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^p}$ は発散する．

以上より，求める p の値とその極限値は，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^p}=\begin{cases}\boldsymbol{\dfrac{2}{3}} & \left(\boldsymbol{p=\dfrac{3}{2}}\right)\\ \boldsymbol{0} & \left(\boldsymbol{p>\dfrac{3}{2}}\right)\end{cases}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

◇　♡

解説

解答がずいぶん長くなってしまいました…それでも前半は標準問題なので，半分は取れなければいけません．(3) では，(1) で証明したことを用いなければ議論が進まないことを理解してください．なぜなら，単調増加でかつ上に凸でなければ，解答のように S_n を評価できないからです．（✎**注** 必ず単調増加でかつ上に凸でなければならないわけではありません．単調性と凹凸を調べなければ不等式が立式できないということです．）このように区分求積法を用いる場合は，グラフの特徴を述べておくことは非常に重要なことなのです．また，解答中に出てくる場合分けについて，何でいきなり $p=\dfrac{3}{2}$ が出てくるの？って疑問を持つ人も少なくないでしょう．これには，次のことを理解しておく必要があります．

【無限大の強さ】

∞（無限大）は，非常に大きいという**状態を表す記号**です．しかし，同じ無限大でも，次の 2 つの無限大はちょっとイメージが違いますよね？

（ｉ）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log n=\infty$　　　（ii）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}e^n=\infty$　（e は自然対数の底）

グラフをかいてみれば一目瞭然ですが，（ｉ）は n を大きくしていくとゆっくりと無限大に近づくのに対して，（ii）は n を大きくしていくと，急激に無限大に近づきます．この感覚は極限の問題を解く上で非常に重要なものなのです．無限大の強弱はグラフを考えるとわかりやすく，次のようになります．

a を自然数とするとき，$n\to\infty$ に対して，

$$\underbrace{\log n}_{\text{対数}}\ll\underbrace{n^{\frac{1}{a}}\ll\cdots\ll n^{\frac{1}{2}}}_{\text{累乗}}\ll\underbrace{n\ll n^2\ll\cdots\ll n^a}_{\text{整式}}\ll\underbrace{2^n\ll 3^n\ll\cdots a^n}_{\text{指数}}\ll\underbrace{n!}_{\text{階乗}}$$

である．（ただし，$a\ll b$ は a が b よりも十分小さいことを表す．）

　この無限大の強弱のイメージが掴めれば，極限の問題は簡単に答えが予想できます．例えば，次の例題で考えてみましょう．

例題

次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{x^2-x+1}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\log x}$

無限大の強さに着目して見ましょう！

(1) $\dfrac{\text{弱い無限大}}{\text{強い無限大}}=0$ ☜ この場合は，分母が勝つので 0 になります.

(2) $\dfrac{\text{同程度の無限大}}{\text{同程度の無限大}}=\alpha$ ☜ この場合は，分母と分子の強さが同じレベルなので，ある値 α に収束します.

(3) $\dfrac{\text{強い無限大}}{\text{弱い無限大}}=\infty$ ☜ この場合は，分子が勝つので ∞ になります.

すなわち，収束するためには，分母の方が強い無限大であるか，分子と分母の無限大の強さが同程度でなければいけません．では，本問の解答に戻ってみましょう.

$$\frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(\frac{n+1}{n^{\frac{2}{3}p}}\right)^3+\frac{1}{n^{2p}}}-\frac{\sqrt{2}}{n^p}\right)-\frac{(n+1)^2}{\sqrt{\left(n^{\frac{2}{3}p+1}+n^{\frac{2}{3}p}\right)^3+n^{2p}}}+\frac{1}{\sqrt{2}n^p}$$
$$<\frac{S_n}{n^p}<\frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(\frac{n+1}{n^{\frac{2}{3}p}}\right)^3+\frac{1}{n^{2p}}}-\frac{\sqrt{2}}{n^p}\right)$$

もちろん不定形の部分に着目します．左辺で不定形になっているのは，

$$\left(\frac{n+1}{n^{\frac{2}{3}p}}\right)^3,\ \frac{(n+1)^2}{\sqrt{\left(n^{\frac{2}{3}p+1}+n^{\frac{2}{3}p}\right)^3+n^{2p}}}$$

の 2 箇所です．前者が収束するためには，分母の次数が分子の次数以上になればよいので，$p\geqq\dfrac{3}{2}$ ……① であることが分かります．後者は根号を含んでいるので，注意が必要です.

分子の次数は，2 で，分母の次数は，$\dfrac{2p+3}{2}$

です．したがって，分母の次数が分子の次数以上になるためには，

$$\frac{2p+3}{2}\geqq 2 \iff p\geqq\frac{1}{2}\ \cdots\cdots②$$

でなければなりません．①, ② を同時にみたすような p $\left(p\geqq\dfrac{3}{2}\right)$ であればよいので，$p=\dfrac{3}{2}$（同程度の無限大のとき）と $p>\dfrac{3}{2}$（分母の方が強い無限大のとき）で場合分けをする必要があったのです.

(3) の類題が，ありますので紹介しておきます．答えだけを載せておきます.

問題 （'97 名古屋大）

正数からなる数列 $\{a_n\}$ が，条件 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2=n^2+2n$ をみたしているとする．数列 $\left\{\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n^r}\right\}$ が収束する実数 r の範囲を求めよ．また，収束する場合，その極限値を求めよ.

解：
$$\begin{cases}\text{収束する } r \text{ の範囲は，}\quad r\geqq\dfrac{3}{2}\\[2mm] \text{極限値は，}\begin{cases} r>\dfrac{3}{2}\text{ のとき，}\quad 0\\[1mm] r=\dfrac{3}{2}\text{ のとき，}\quad \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\end{cases}\end{cases}$$

θ を媒介変数として曲線 C を次のように定義する.

$$C\ :\left\{\begin{array}{l} x=\theta\cos\theta \\ y=\theta\sin\theta \end{array}\right. \quad \left(-\frac{3}{2}\pi \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi\right)$$

(1)　曲線 C は y 軸に関して対称であることを示せ.

(2)　$\dfrac{dx}{d\theta}$, $\dfrac{dy}{d\theta}$, $\dfrac{dy}{dx}$ をそれぞれ θ を用いて表せ.

(3)　曲線 C の概形を図示せよ.

θ を媒介変数として曲線 C を次のように定義する.

$$C\ :\ \begin{cases} x=\theta\cos\theta \\ y=\theta\sin\theta \end{cases} \quad \left(-\frac{3}{2}\pi \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi\right)$$

(1)　曲線 C は y 軸に関して対称であることを示せ.

(2)　$\dfrac{dx}{d\theta}$, $\dfrac{dy}{d\theta}$, $\dfrac{dy}{dx}$ をそれぞれ θ を用いて表せ.

(3)　曲線 C の概形を図示せよ.

【テーマ】：媒介変数表示された曲線の図示

方針

(1) での y 軸に関する対称性を証明するときは, θ の範囲が 0 を境に対称なので, $\theta \geqq 0$ と $\theta \leqq 0$ に分けて考えます. (2) は合成関数の微分を用います. (3) では, (1), (2) で求めた情報を基にして増減表をつくりグラフをかきます.

(1) から意外に難問という印象を持ったかもしれません. θ の値が 0 に関して対称である点に注目しましょう. $y=f(x)$ が y 軸に関して対称であることを証明するためには, $f(-x)=f(x)$ であることを証明すればよいことは知っているでしょう. 本問のように θ が 0 を境に対称に与えられているときは,

$$x(-\theta)=-x(\theta)\ ,\ \ y(-\theta)=y(\theta)$$

を示します.

ポイント

y 軸に関する対称性は, $x(-\theta)=-x(\theta)$, $y(-\theta)=y(\theta)$ を示す.

♣　♠

解答

(1) **【証明】**

$$C\ :\ \begin{cases} x(\theta)=\theta\cos\theta \\ y(\theta)=\theta\sin\theta \end{cases} \quad \text{とおく.}$$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ のとき, $\begin{cases} x(\theta)=\theta\cos\theta \\ y(\theta)=\theta\sin\theta \end{cases}$ に対して, $-\dfrac{3}{2}\pi \leqq \theta \leqq 0$ のとき,

$$\begin{cases} x(-\theta)=-\theta\cos(-\theta)=-\theta\cos\theta=-x(\theta) \\ y(-\theta)=-\theta\sin(-\theta)=\theta\sin\theta=y(\theta) \end{cases}$$

となるので, 曲線 C は y 軸に関して対称であることが示された.　**(証明終)……(答)**

(2)　x, y をそれぞれ θ で微分すると,

$$\frac{dx}{d\theta}=\boldsymbol{\cos\theta-\theta\sin\theta}\cdots\cdots(\text{答})\quad ,\quad \frac{dy}{d\theta}=\boldsymbol{\sin\theta+\theta\cos\theta}\cdots\cdots(\text{答})$$

となるので，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\boldsymbol{\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3)　(1) より，C は y 軸に関して対称であるから，$0\leqq\theta\leqq\frac{3}{2}\pi$ で考える．この範囲で $x=0,\ y=0$ となる θ の値は，

$$x=0 \text{ のとき，}\quad \theta=0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$$
$$y=0 \text{ のとき，}\quad \theta=0,\ \pi$$

である．

(i)　$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき，

$\frac{dy}{d\theta}>0$ である．ここで，$\frac{dx}{d\theta}=f(\theta)=\cos\theta-\theta\sin\theta$ とおくと，

$$f'(\theta)=-\sin\theta-\sin\theta-\theta\cos\theta<0$$

となるので，$f(\theta)$ は単調減少である．$f(0)=1>0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}<0$ で $f(\theta)$ が連続関数であることから $f(\theta)=0$ となる θ の値がただ一つ存在する．その値を $\theta=\alpha$ とする．

(ii)　$\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，

$\frac{dx}{d\theta}<0$ である．ここで，$\frac{dy}{d\theta}=g(\theta)=\sin\theta+\theta\cos\theta$ とおくと，

$$g'(\theta)=\cos\theta+\cos\theta-\theta\sin\theta<0$$

となるので，$g(\theta)$ は単調減少である．$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1>0,\ g(\pi)=-\pi<0$ で $g(\theta)$ が連続関数であることから $g(\theta)=0$ となる θ の値がただ一つ存在する．その値を $\theta=\beta$ とする．

(iii)　$\pi\leqq\theta\leqq\frac{3}{2}\pi$ のとき，

$\frac{dy}{d\theta}<0$ である．ここで，$\frac{dx}{d\theta}=f(\theta)=\cos\theta-\theta\sin\theta$ とおくと，

$$f'(\theta)=-\sin\theta-\sin\theta-\theta\cos\theta>0$$

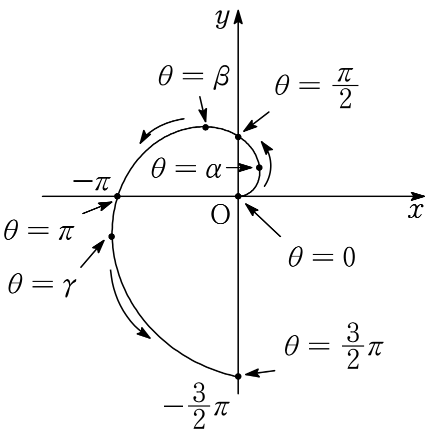
となるので，$f(\theta)$ は単調増加である．$f(\pi)=-1<0,\ f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\frac{3}{2}\pi>0$ で $f(\theta)$ が連続関数であることから $f(\theta)=0$ となる θ の値がただ一つ存在する．その値を $\theta=\gamma$ とする．

以上 (i)〜(iii) より，$0\leqq\theta\leqq\frac{3}{2}\pi$ での増減表は次のようになる．

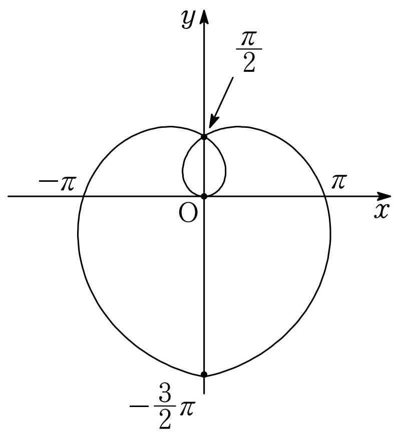
θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	β	$\cdots$	π	$\cdots$	γ	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$
$\frac{dx}{d\theta}$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x	0	$\rightarrow$		$\leftarrow$	0	$\leftarrow$		$\leftarrow$	$-\pi$	$\leftarrow$		$\rightarrow$	0
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
y	0	$\uparrow$		$\uparrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\uparrow$		$\downarrow$	0	$\downarrow$		$\downarrow$	$-\frac{3}{2}\pi$

よって，曲線 C の $0\leqq\theta\leqq\frac{3}{2}\pi$ での概形は，次の図 1 のようになるので，y 軸に関する対称性を考えて曲

線 C の概形は図２のようになる．



【図１】



【図２】

♢　　　　♡

解説

媒介変数表示された関数のグラフをかくのは慣れていないと非常に大変な作業になり，思ったより時間がかかるでしょう．ポイントとしては，軸に関する対称性を発見するということです．これによって，ある程度増減表を縮小することができるのでグラフが非常にかきやすくなります．本問では，誘導していますが自分で対称性を発見できる訓練をしておきましょう．

次の問いに答えよ.

（1） $x \geqq y \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{x}{1+x} \geqq \dfrac{y}{1+y}$ が成り立つことを示せ.

（2） 不等式 $\dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}+\dfrac{|z|}{1+|z|} \geqq \dfrac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$ が成り立つことを示し，等号が成立するための条件を求めよ.

次の問いに答えよ．

（1） $x \geqq y \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{x}{1+x} \geqq \dfrac{y}{1+y}$ が成り立つことを示せ．

（2） 不等式 $\dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}+\dfrac{|z|}{1+|z|} \geqq \dfrac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$ が成り立つことを示し，等号が成立するための条件を求めよ．

【テーマ】：不等式の証明

方針

(1) は不等式の証明の基本で大きい方から小さい方を引いて正であることを示します．(2) はある有名不等式と (1) を用いれば証明することができます．

本問のように，(1) で得られた結果を (2) 以降で用いることはよくあることです．このようなタイプの問題はしっかりと演習を積んで慣れておく必要があります．また，絶対値が絡んだ有名不等式

$$\big||x|-|y|\big| \leqq |x+y| \leqq |x|+|y|,\ \big||x|-|y|\big| \leqq |x-y| \leqq |x|+|y|$$

は知っておく必要があります．この不等式を**三角不等式**といいます．(2) では，この不等式を応用して用います．

ポイント

三角不等式 $\big||x|-|y|\big| \leqq |x+y| \leqq |x|+|y|$ の利用

♣ ♠

解答

（1） **【証明】**

$$\begin{aligned}(\text{左辺})-(\text{右辺}) &= \frac{x}{1+x}-\frac{y}{1+y}\\ &= \frac{x(1+y)-y(1+x)}{(1+x)(1+y)}\\ &= \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} \geqq 0 \quad (\because\ x \geqq y \geqq 0)\end{aligned}$$

等号は，$x=y$ のとき，成立する．ゆえに，示された． **(証明終)……(答)**

（2） **【証明】**

$|x+y+z| \leqq |x|+|y|+|z|$ が成り立つので，(1) の結果から，

$$\frac{|x|+|y|+|z|}{1+|x|+|y|+|z|} \geqq \frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|} \qquad \cdots\cdots Ⓐ$$

$$\iff \frac{|x|}{1+|x|+|y|+|z|}+\frac{|y|}{1+|x|+|y|+|z|}+\frac{|z|}{1+|x|+|y|+|z|} \geqq \frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$$

$$\iff \frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}+\frac{|z|}{1+|z|} \geqq \frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|} \qquad \cdots\cdots Ⓑ$$

ここで，Ⓐ での等号成立条件は，$x=y=z$ であり，Ⓑ での等号成立条件は，

$$\begin{cases} \dfrac{|x|}{1+|x|+|y|+|z|} = \dfrac{|x|}{1+|x|} \\ \dfrac{|y|}{1+|x|+|y|+|z|} = \dfrac{|y|}{1+|y|} \\ \dfrac{|z|}{1+|x|+|y|+|z|} = \dfrac{|z|}{1+|z|} \end{cases}$$

がすべて成り立つときであるから，x, y, z のうち少なくとも 2 つが 0 であればよい．
ゆえに，等号が成り立つのは，x, y, z のうち少なくとも 2 つが 0 であればよい．
以上より，示された． **(証明終)……(答)**

◇ ♡

解説

(2) の式変形が難しいでしょう．(1) の結果を生かすためには，まず (1) での仮定 ($x \geqq y \geqq 0$) をみたす不等式が必要になります．ここでは，それが三角不等式なのです．しかし，$|x+y| \leqq |x|+|y|$ をそのまま使っても示したい不等式は出てきません．これを次のように式変形してから用いる必要があります．
この不等式の y に $y+z$ を代入すると，

$$|x+y+z| \leqq |x|+|y+z|$$

となります．次に $|y+z|$ の部分に再び三角不等式を利用すると，

$$|x+y+z| \leqq |x|+|y+z| \leqq |x|+|y|+|z|$$

となります．あとは，最後の式変形を思いつくかどうかがポイントですが，$\dfrac{|x|}{1+|x|+|y|+|z|}$ より $\dfrac{|x|}{1+|x|}$ の方が大きければ (y, z についても同様)，目的の不等式が得られると考えるところが重要になります．

2 人がじゃんけんをして，先に 3 回勝った方を優勝者とする．あいこも勝負の回数に含めるものとする．このとき，次の確率を求めよ．

（1） ちょうど 3 回の勝負で優勝者が決まる確率.

（2） ちょうど 4 回の勝負で優勝者が決まる確率.

（3） ちょうど 5 回の勝負で優勝者が決まる確率.

2 人がじゃんけんをして，先に 3 回勝った方を優勝者とする．あいこも勝負の回数に含めるものとする．このとき，次の確率を求めよ．

(1) ちょうど 3 回の勝負で優勝者が決まる確率．

(2) ちょうど 4 回の勝負で優勝者が決まる確率．

(3) ちょうど 5 回の勝負で優勝者が決まる確率．

【テーマ】：確率の基本計算

方針

(2), (3) では，優勝が決まる直前までの状況を考えます．簡単な図をかくと理解しやすいでしょう．

基本問題なので，完答できなければいけません．高々 5 回のじゃんけんなので，実際に地道にすべての場合を書き出しても計算することは可能ですが，それではこの問題を一般化したような問題を解くことができません．本問は，反復試行の確率の計算をすればよいのですが，3 回勝った時点で優勝が決まるので，注意しなければいけません．

ポイント

優勝が決まる直前までの勝敗を考える！

♣ ♠

解答

(1) じゃんけんをするとき手の出し方は同様に確からしいのでその確率はいずれも $\frac{1}{3}$ である．どちらが優勝するかで 2 通りあり，一方が 3 連勝すればよいので，求める確率は，

$$2\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\boldsymbol{\frac{2}{27}}\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) どちらが優勝するかで 2 通りあり，一方が優勝するのは，3 回目のじゃんけんが終了した時点で

(ｉ) 2 勝 1 敗になっている方が 4 回目に勝つとき

(ii) 2 勝 1 分けになっている方が 4 回目に勝つとき

である．1 敗か 1 分けになる確率は $\frac{2}{3}$ であるから，求める確率は，

$$2\times{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{4}{27}}\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) (2) と同様に考える．どちらが優勝するかで 2 通りあり，一方が優勝するのは，4 回目のじゃんけんが終了した時点で

(ｉ) 2 勝 2 敗になっている方が 5 回目に勝つとき

(ii) 2 勝 1 敗 1 分けになっている方が 5 回目に勝つとき

（iii） 2 勝 2 分けになっている方が 5 回目に勝つとき

である．2 敗か 1 敗 1 分けか 2 分けになる確率は $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ であるから，求める確率は，

$$2 \times {}_4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{16}{81}} \cdots\cdots (\textbf{答})$$

である．

◇ ♡

解説

大切なのは，最後の 1 回で優勝する人が勝つという部分です．例えば，(2) で 4 回のじゃんけんを次のようにまとめて計算するのは間違いです．

$$2 \times {}_4C_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3$$

なぜなら，このような計算をすると，

（勝ち，勝ち，勝ち，負け）

の場合も含まれてしまうからです．

余裕のある人は，この問題を一般化して考えてみましょう．

a を正の定数とする．xyz 空間において，

$$\text{球体 } x^2+y^2+z^2 \leqq 4a^2 \text{ と円柱 } (x-a)^2+y^2 \leqq a^2$$

を考える．この 2 つの立体の共通部分の体積を求めよ．

a を正の定数とする．xyz 空間において，

$$\text{球体 } x^2+y^2+z^2 \leqq 4a^2 \text{ と円柱 } (x-a)^2+y^2 \leqq a^2$$

を考える．この 2 つの立体の共通部分の体積を求めよ．

【テーマ】：立体同士が交わる部分の体積

方針

平面 $z=t$ での切り口の面積を t で表し，t で積分すれば体積が求まります．

立体の共通部分の体積を求める問題は，経験していなければ難問でしょう．経験したことがない人は，本問で基本的な考え方を身につけ類題演習を解いておきましょう．

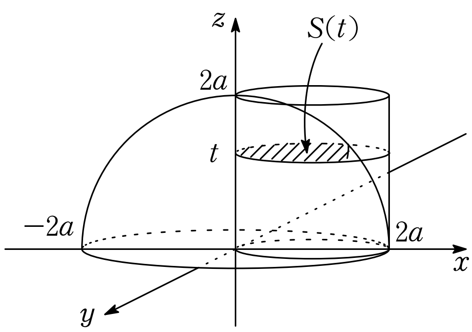
ポイント

平面 $z=t$ での切り口の面積を t で表す！

♣ ♠

解答

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leqq 4a^2 & \cdots\cdots \text{①} \\ (x-a)^2+y^2 \leqq a^2 & \cdots\cdots \text{②} \end{cases}$$



xy 平面に関する対称性より $z \geqq 0$ の部分で考える．

平面 $z=t$ $(0 \leqq t \leqq 2a)$ による切り口は，①, ② に $z=t$ を代入して得られる次の 2 つの円盤の共通部分である．

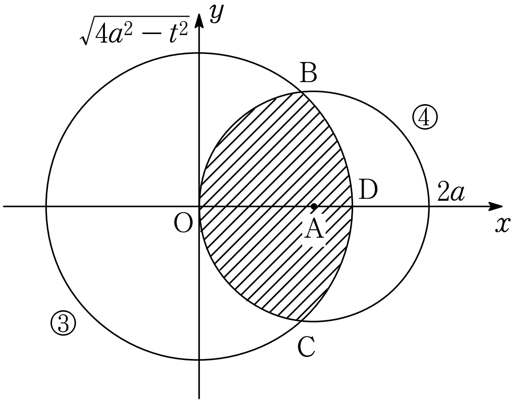
$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 4a^2-t^2 & \text{かつ} \quad z=t \\ (x-a)^2+y^2 \leqq a^2 & \text{かつ} \quad z=t \end{cases}$$

断面を xy 平面に正射影して考える．$\mathrm{A}(a, 0)$ とし，2 つの円

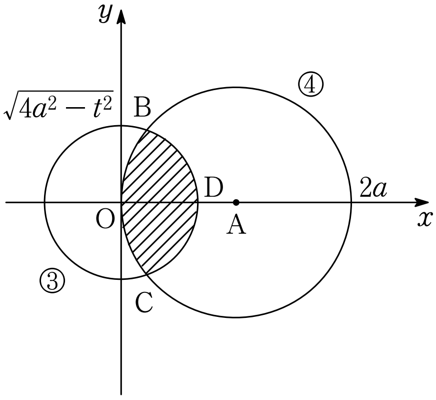
$$\begin{cases} x^2+y^2 = 4a^2-t^2 & \cdots\cdots \text{③} \\ (x-a)^2+y^2 = a^2 & \cdots\cdots \text{④} \end{cases}$$

の交点を下図のように B, C とおく．さらに $\mathrm{D}(\sqrt{4a^2-t^2}, 0)$ とおく．

（ i ） $4a^2-t^2 \geqq a^2 \iff 0 \leqq t \leqq \sqrt{3}a$ のとき，



（ii） $4a^2-t^2 \leqq a^2 \iff \sqrt{3}a \leqq t \leqq 2a$ のとき，



断面積を $S(t)$ とし，$\angle\mathrm{AOB}=\theta\ \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，

$$\mathrm{OB}=\sqrt{4a^2-t^2}=2a\cos\theta \qquad \therefore\ t=2a\sin\theta\ \cdots\cdots⑤$$

(i), (ii) のいずれの場合も

$$\begin{aligned}S(t)&=2(\text{扇形 OBD}+\text{扇形 AOB}-\triangle\mathrm{AOB})\\&=2\left\{\frac{1}{2}(2a\cos\theta)^2\cdot\theta+\frac{1}{2}a^2(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}a^2\sin(\pi-2\theta)\right\}\\&=4a^2\cos^2\theta\cdot\theta+a^2(\pi-2\theta)-a^2\sin2\theta\\&=a^2(4\theta\cos^2\theta-\sin2\theta+\pi-2\theta)\end{aligned}$$

よって，求める体積を V とすると，

$$V=2\int_0^{2a}S(t)\,dt$$

となるので，⑤ の関係式を用いて置換すると，$dt=2a\cos\theta d\theta$ であり，

t	$0\ \to\ 2a$
θ	$0\ \to\ \dfrac{\pi}{2}$

となるので，

$$\begin{aligned}V&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2(4\theta\cos^2\theta-\sin2\theta+\pi-2\theta)\cdot2a\cos\theta\,d\theta\\&=4a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{4\theta\cos^3\theta-\sin2\theta\cos\theta+(\pi-2\theta)\cos\theta\right\}\,d\theta\\&=4a^3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta(\cos3\theta+3\cos\theta)\,d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2\theta)\cos\theta\,d\theta\right)\end{aligned}$$

ここで，

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta(\cos3\theta+3\cos\theta)\,d\theta$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta$$

$$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2\theta)\cos\theta\,d\theta$$

とおいて，それぞれの積分値を計算すると，

$$\begin{aligned}I_1&=\left[\theta\left(\frac{1}{3}\sin3\theta+3\sin\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{3}\sin3\theta+3\sin\theta\right)d\theta\\&=\frac{4}{3}\pi+\left[\frac{1}{9}\cos3\theta+3\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{4}{3}\pi-\left(\frac{1}{9}+3\right)\\&=\frac{4}{3}\pi-\frac{28}{9}\end{aligned}$$

$$I_2=\left[-\frac{2}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}I_3&=\left[(\pi-2\theta)\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin\theta\,d\theta\\&=\left[-2\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\end{aligned}$$

ゆえに，

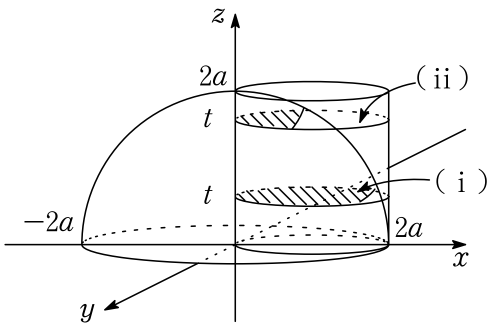
$$\begin{aligned} V &= 4a^3(I_1 - I_2 + I_3) \\ &= 4a^3\left(\frac{4}{3}\pi - \frac{28}{9} - \frac{2}{3} + 2\right) \\ &= 4a^3\left(\frac{4}{3}\pi - \frac{16}{9}\right) \\ &= \boldsymbol{16\left(\frac{\pi}{3} - \frac{4}{9}\right)a^3} \cdots\cdots\textbf{(答)} \end{aligned}$$

◇ ♡

解説

解答の方針が分かっていても計算量が非常に多いので，計算間違いをしやすく V が立式できたとしても正解までたどり着くためには，計算力が必要です．さて，簡単に解説を加えておきましょう．解答中にある（ｉ）と（ii）の場合分けは，点 A が円盤の共通部分内にあるかないかで場合分けを行っています．解答中の図は，下図のように，切った部分を上から見ている図です．

円柱の方はどこで切っても同じ半径ですが，球体の方は切る場所によって半径が変わってしまうので，t での場合分けが必要になります．しかし，共通部分の面積を計算すれば分かりますが，結局どちらにしても計算式は同じになるので，実はそれほど厄介なことにはなりません．共通部分の面積が求められたら，体積の公式にしたがって，t を 0 から $2a$ まで積分してやればよいのです．



a を定数とするとき，$f(x) = x^2 - 2x + 2\ (a \leqq x \leqq a+1)$ の最大値を $M(a)$，最小値を $m(a)$ とする．

（1） $M(a), m(a)$ をそれぞれ求めよ．

（2） $y = M(a)$，$y = m(a)$ のグラフをかき，それぞれの最小値を求めよ．

a を定数とするとき，$f(x)=x^2-2x+2\ (a \leqq x \leqq a+1)$ の最大値を $M(a)$，最小値を $m(a)$ とする．

（1） $M(a), m(a)$ をそれぞれ求めよ．

（2） $y=M(a)$，$y=m(a)$ のグラフをかき，それぞれの最小値を求めよ．

【テーマ】：２次関数の最大値・最小値

方針

まずは，平方完成をして**軸の方程式**を求めます．次に簡単なグラフを使って軸と定義域の位置関係に着目します．**最大値・最小値をとる x の値が変化するところ**を探してそこを基準に場合分けを行いましょう．

この問題には大きく分けて次の**３種類のタイプ**があります．

（ｉ） 関数が固定されていて**定義域が変化**する（定義域に文字を含む）

（ii） **関数が変化**し，定義域は固定されている（関数に文字を含む）

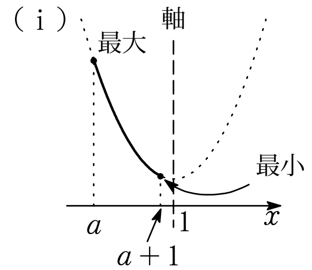
（iii） **関数と定義域が両方とも変化**する（関数にも定義域にも文字を含む）

（iii）は厄介ですが，（ｉ），（ii）は頻出タイプなので，まずはこちらをしっかりと理解しましょう．本問は，（ｉ）のタイプですがいずれにせよ考え方は同じです．

♣ ♠

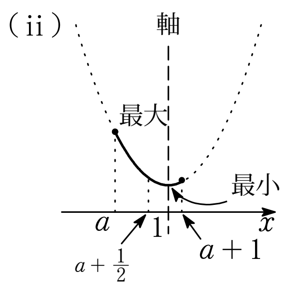
解答

(1) $f(x)=(x-1)^2+1$ と平方完成できるので，軸の方程式は，$x=1$ であり，頂点は $(1, 1)$ である．したがって，次の 5 通りに場合分けする．



（ｉ） 軸が**定義域の右側**
（ii） 軸が**定義域内の右側**
（iii） 軸が**定義域の中央**
（iv） 軸が**定義域内の左側**
（ｖ） 軸が**定義域の左側**

これより，求める最大値・最小値は，次のようになる．

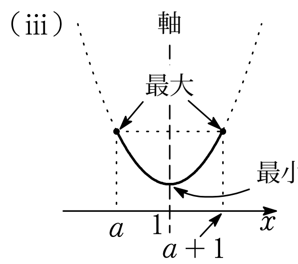


（ｉ） $a+1<1$ すなわち $a<0$ のとき，

$$\begin{cases} M(a)=f(a)=a^2-2a+2 \\ m(a)=f(a+1)=(a+1-1)^2+1=a^2+1 \end{cases}$$

（ii） $a+\dfrac{1}{2}<1 \leqq a+1$ すなわち $0 \leqq a<\dfrac{1}{2}$ のとき，

$$\begin{cases} M(a)=f(a)=a^2-2a+2 \\ m(a)=f(1)=1 \end{cases}$$



（iii） $a+\dfrac{1}{2}=1$ すなわち $a=\dfrac{1}{2}$ のとき，

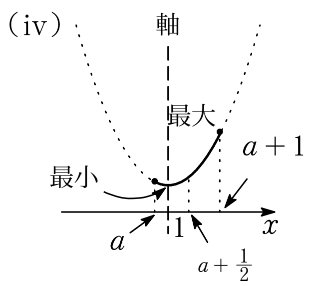
$$\begin{cases} M(a)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}-1\right)^2+1=\dfrac{5}{4} \\ m(a)=f(1)=1 \end{cases}$$

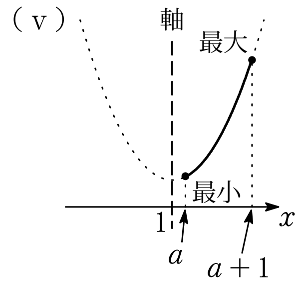
（iv） $a \leqq 1 < a + \frac{1}{2}$ すなわち $\frac{1}{2} < a \leqq 1$ のとき，

$$\begin{cases} M(a) = f(a+1) = a^2 + 1 \\ m(a) = f(1) = 1 \end{cases}$$

（ｖ） $1 < a$ のとき，

$$\begin{cases} M(a) = f(a+1) = a^2 + 1 \\ m(a) = f(a) = a^2 - 2a + 2 \end{cases}$$

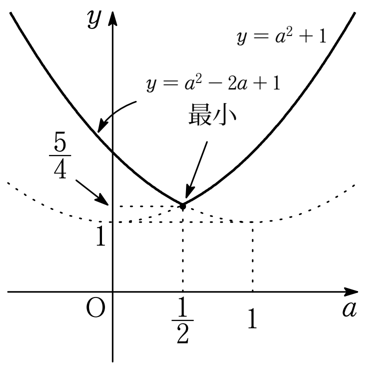




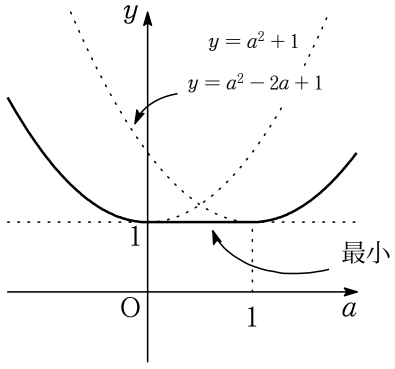
ゆえに，最大値・最小値をまとめると次のようになる．

$$\boldsymbol{M(a) = \begin{cases} a^2 - 2a + 2 & \left(a \leqq \frac{1}{2}\right) \\ a^2 + 1 & \left(a > \frac{1}{2}\right) \end{cases} \qquad m(a) = \begin{cases} a^2 + 1 & (a < 0) \\ 1 & (0 \leqq a \leqq 1) \\ a^2 - 2a + 2 & (a > 1) \end{cases}}$$ ……(答)

(2)　(1) より，$y = M(a)$, $y = m(a)$ のグラフはそれぞれ次のようになる．



$y = M(a)$ のグラフ



$y = m(a)$ のグラフ

これより，$y = M(a)$, $y = m(a)$ の最小値は，それぞれ

$M(a)$ は，$a = \frac{1}{2}$ のとき，最小値 $\frac{9}{4}$
$m(a)$ は，$0 \leqq a \leqq 1$ のとき，最小値 1 ……(答)

をとる．

◇ ♡

解説

最大値だけ最小値だけを求める場合は，(1) の答えのように場合分けが少なくてすみます．先ほどの 5 つの場合を見れば最大値だけを求めるのなら，（ｉ）と（ii）は同じで，（iii）が最大値をとる x の値が 2 つ存在するので，ちょっと特殊で，（iv）と（ｖ）が同じなので，3 つですみます．人によっては，（iii）をどちらかに含めて 2 つに場合分けをする人もいますが，x の値が 2 つ存在するので分けました．ただし，答えをまとめる段階では，最大値をとる x の値は気にしないので，まとめることにします．また，最小値だけなら，（ii），（iii），（iv）が同じなので 3 つですね．ここでは，下に凸な関数を扱いましたが，上に凸な関数を扱う場合も同様な考えで場合分けをします．ここで，多くの人が悩むのが ＝（イコール）の位置ではないでしょうか？これは，a の値がちゃんと繋がっていればどこにあってもかまいません．例えば，（ii）で $0 < a < \frac{1}{2}$ としてしまうと，a に関する場合分けで $a = 0$ だけが扱われていないことになるので，このような事態にならないように ＝（イコール）を入れてやればよいのです．また，本問のように 2 次関数の値を計算する際は，元の式に代入するより，**平方完成した式に代入**するほうが簡単に計算できる場合があります．どちらに代入したほうが簡単かは場合によりますので，臨機応変に計算できるようにしておきましょう．$a + \frac{1}{2}$ は定義域 $(a \leqq x \leqq a+1)$ のちょうど真ん中の値になります．つまり，ここでは軸 $(x = 1)$ が定義域の中央に対して，「右にある（ii）」のか「中央にある（iii）」のか「左にある（iv）」のかで場合分けするためこのような値が出てきます．

変数 x の範囲が実数全体であるとき，$\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x-1}$ のとり得る値の範囲を求めよ．

変数 x の範囲が実数全体であるとき，$\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x-1}$ のとり得る値の範囲を求めよ.

【テーマ】：分数式の最大値・最小値

方針

$\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x-1}=k$ とおいて，k の最大値・最小値を求めます．その際に x が実数であるという条件を利用します.

一見すると数学 Ⅲ の問題に見えますが，数学 Ⅰ の範囲で処理することができます．方針 で述べたように，式の値を k とおき，分母を払って x に関する 2 次方程式と見なすことがポイントです．あとは，x が実数であるという条件を使います.

♣ ♠

解答

$\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x-1}=k$ とおくと，

$$x^2+2x+1=kx^2-kx-k \iff (k-1)x^2-(k+2)x-k-1=0 \quad \cdots\cdots ①$$

（ i ） $k=1$ のとき，① は，

$$-3x-2=0 \quad \therefore \quad x=-\frac{2}{3}$$

（ii） $k \fallingdotseq 1$ のとき，① は実数解をもつことから，判別式を D とすると，

$$\begin{aligned} D &= (k+2)^2-4(k-1)(-k-1) \geqq 0 \\ & k^2+4k+4+4(k^2-1) \geqq 0 \\ & 5k^2+4k \geqq 0 \\ & k(5k+4) \geqq 0 \qquad \therefore \quad k \leqq -\frac{4}{5},\ 0 \leqq k \end{aligned}$$

$k \fallingdotseq 1$ より，$k \leqq -\dfrac{4}{5},\ 0 \leqq k<1,\ 1<k$ である.

（ i),（ii）より，$\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x-1}=k$ のとり得る値の範囲は，

$$\boldsymbol{k \leqq -\frac{4}{5},\ 0 \leqq k} \cdots\cdots \textbf{(答)}$$

である.

数学 Ⅲ を学習している人は，次のようにしても解答することができます.

別解

$f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x-1}$ とおくと，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+2)(x^2-x-1)-(x^2+2x+1)(2x-1)}{(x^2-x-1)^2} \\ &= \frac{-(3x^2+4x+1)}{(x^2-x-1)^2} \\ &= \frac{-(3x+1)(x+1)}{(x^2-x-1)^2} \end{aligned}$$

となるので，$f'(x)=0$ のとき，$x=-1,\ -\dfrac{1}{3}$ である．また，$x^2-x-1 \fallingdotseq 0$ であることから，$x \fallingdotseq \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ で

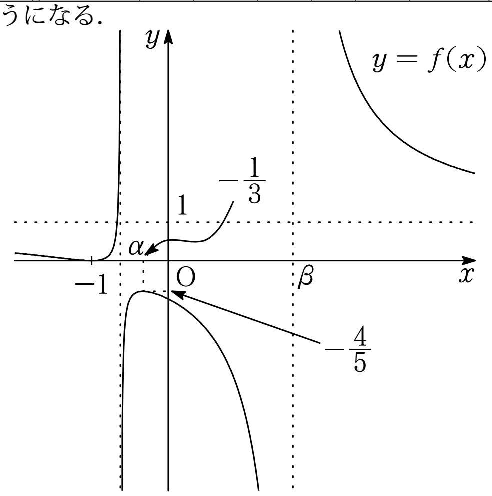
あり，$\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおくと，

$$\lim_{x \to \alpha - 0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to \alpha + 0} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to \beta - 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \beta + 0} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$$

となるので，増減表は次のようになる．

x	$(-\infty)$	$\cdots$	-1	$\cdots$	α	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	β	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	(1)	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$	$-\frac{4}{5}$	$\searrow$		$\searrow$	(1)

よって，グラフは，次のようになる．



ゆえに，$\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x-1} = f(x)$ のとり得る値の範囲は，

$$\boldsymbol{f(x) \leqq -\frac{4}{5},\ 0 \leqq f(x)}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

である．

◇ ♡

解説

理系の人は，数学 Ⅲ の知識が邪魔して微分してしまいがちですが，実は数学 Ⅰ の知識があれば十分解答できます．このような解法には一度は触れておきたいものです．問題を様々な角度から解答する力を養うことは非常に大切なことです．

ちなみに，別解 を見てもわかるように微分すると，様々な点に注意して極限値を計算しなければならないため，ミスをしやすくなります．

a を正の定数とする．方程式 $\left|x^3 - 4x\right| = ax + a + 1$ の実数解の個数を調べよ．

a を正の定数とする．方程式 $|x^3-4x|=ax+a+1$ の実数解の個数を調べよ．

【テーマ】：実数解の個数

方針

左辺を $f(x)$，右辺を $g(x)$ として，$f(x)$ と $g(x)$ のグラフの交点の個数で考えます．その際に $g(x)$ が定点を通ることに着目すると見通しが立ちます．

方程式の実数解の個数を求める方法はいくつかあります．

（ｉ） 方程式を解いたり，2 次方程式ならば判別式を用いる．

（ii） グラフを利用する．

代表的なものを 2 つ上げましたが，本問では，（ii）を利用します．どのように式を変形し，グラフを利用するかで様々な解法が生まれる問題です．

♣ ♠

解答

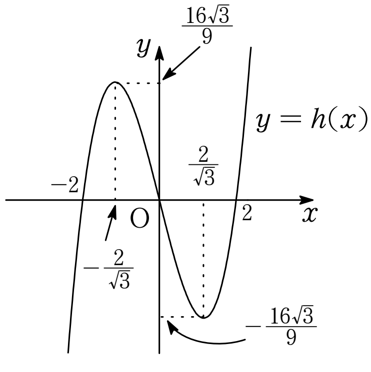
与えられた方程式の実数解の個数は，

$$f(x)=|x^3-4x|$$
$$g(x)=ax+a+1 \quad \cdots\cdots①$$

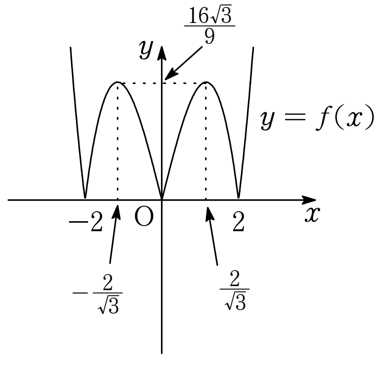
のグラフの交点の個数に等しい．$h(x)=x^3-4x$ とおくと，$h'(x)=3x^2-4$ であるから，$h'(x)=0$ のとき，$x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ である．よって，増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$	↘	$-\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$	↗

ゆえに，$y=h(x)$ のグラフは，図 1 のようになるので，$y=f(x)$ のグラフは図 2 のようになる．



【図 1】



【図 2】

ここで，$g(x)=ax+a+1=a(x+1)+1$ であるから，① は a の値にかかわらず点 $(-1,\ 1)$ を通ることがわかる．また，① が $y=-x^3+4x$ と第 1 象限で接するときを考えると，$y=-x^3+4x$ 上の点 $(t,\ -t^3+4t)$ における接線が $y=a(x+1)+1$ と一致するので，$y'=-3x^2+4$ であることから，

$$y=(-3t^2+4)(x-t)-t^3+4t \iff y=(-3t^2+4)x+2t^3$$

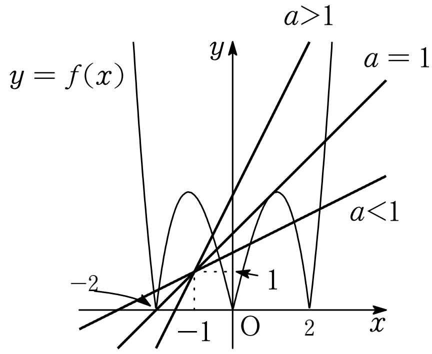
より，

$$\begin{cases} -3t^2+4=a \\ 2t^3=a+1 \end{cases} \iff -3t^2+5=2t^3 \iff (t-1)(2t^2+5t+5)=0$$

t は実数であるから，$t=1$ である．よって，このとき $a=1$ である．次に，$y=g(x)$ が点 $(-2,0)$ を通るとき，

$$0=-2a+a+1 \quad \therefore \quad a=1$$

ゆえに，グラフから，与えられた方程式の実数解の個数は，次のようになる．



$$\begin{cases} \mathbf{0<a<1} \textbf{ のとき，} & \mathbf{6} \textbf{ 個} \\ \mathbf{a=1} \textbf{ のとき，} & \mathbf{4} \textbf{ 個} \\ \mathbf{a>1} \textbf{ のとき，} & \mathbf{2} \textbf{ 個} \end{cases} \cdots\cdots(\text{答})$$

$\boxed{\text{解説}}$

まずは，絶対値のグラフがかけないと話になりません．本問は，前述したように式の変形方法によって様々な解法が考えられます．

$$|x^3-4x|-1=a(x+1)$$

のように変形することもできますが，これは絶対値のグラフをかいてしまえば，本解の方法と大差がありません．ただ，絶対値のグラフをかくのがちょっと面倒なので，あまりよい変形とはいえません．また，定数を分離するという考え方を使えば，

$$\frac{|x^3-4x|-1}{x+1}=a$$

と変形できますが，$x \neq -1$ のときしかこの変形ができないことに加えて左辺が複雑になりすぎて，数学 Ⅲ の知識が必要になります．もちろんグラフをかくのも大変になります．臨機応変に解法を使い分けられるようにしておくことが必要でしょう．

曲線 C ： $y=e^x$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(a,\, e^a)$ ，$\mathrm{P}(t,\, e^t)$ における C のそれぞれの法線の交点を Q として，線分 AQ の長さを $L_a(t)$ で表す．さらに，$r(a)=\lim_{t \to a} L_a(t)$ と定義する．

（1） $r(a)$ を求めよ．

（2） a が実数全体を動くとき，$r(a)$ の最小値を求めよ．

曲線 C ： $y=e^x$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(a,\, e^a)$ ，$\mathrm{P}(t,\, e^t)$ における C のそれぞれの法線の交点を Q として，線分 AQ の長さを $L_a(t)$ で表す．さらに，$r(a)=\lim\limits_{t\to a} L_a(t)$ と定義する．

（1） $r(a)$ を求めよ．

（2） a が実数全体を動くとき，$r(a)$ の最小値を求めよ．

【テーマ】：接線と法線

方針

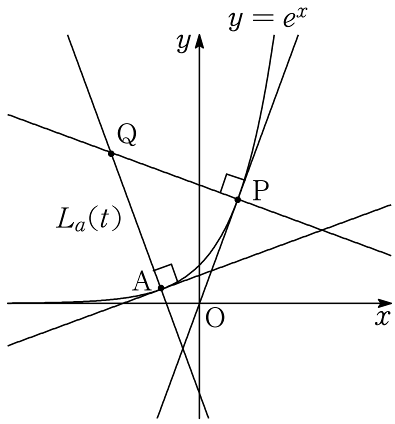
(1) は図をかいて丁寧に計算することを心がけましょう．(2) は $r(a)$ が最小になるためには，何が最小になればよいのかを考え，効率よい計算をしましょう．

解答

（1） 点 A, P における法線の方程式は，$y'=e^x$ であることより，

$$\text{A における法線} \;:\; y=-\frac{1}{e^a}(x-a)+e^a \quad \cdots\cdots①$$

$$\text{P における法線} \;:\; y=-\frac{1}{e^t}(x-t)+e^t \quad \cdots\cdots②$$



よって，①, ② の交点 Q は，

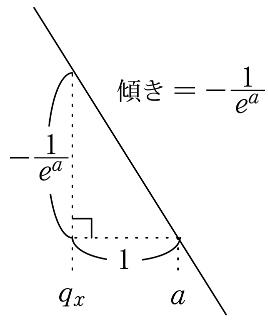
$$-\frac{1}{e^a}(x-a)+e^a=-\frac{1}{e^t}(x-t)+e^t$$

$$-\frac{1}{e^a}(x-a)+\frac{1}{e^t}(x-t)=e^t-e^a$$

$$\left(\frac{1}{e^t}-\frac{1}{e^a}\right)x=e^t-e^a-\left(\frac{a}{e^a}-\frac{t}{e^t}\right)$$

$$\therefore\quad x = \frac{e^t-e^a-\left(\frac{a}{e^a}-\frac{t}{e^t}\right)}{\frac{1}{e^t}-\frac{1}{e^a}} = \frac{e^te^a(e^t-e^a)-(ae^t-te^a)}{e^a-e^t}$$

この値を q_x とする．右図を参考にして，



$$L_a(t)=\mathrm{AQ} = \sqrt{(a-q_x)^2+(a-q_x)^2\left(-\frac{1}{e^a}\right)^2} = |a-q_x|\sqrt{1+\frac{1}{e^{2a}}}$$

したがって，

$$\begin{aligned} L_a(t) &= \left|a-\frac{e^te^a(e^t-e^a)-(ae^t-te^a)}{e^a-e^t}\right|\sqrt{1+\frac{1}{e^{2a}}} \\ &= \left|\frac{-e^te^a(e^t-e^a)+(a-t)e^a}{e^a-e^t}\right|\sqrt{1+\frac{1}{e^{2a}}} \\ &= \left|e^te^a+\frac{a-t}{e^a-e^t}e^a\right|\sqrt{1+\frac{1}{e^{2a}}} \end{aligned}$$

ここで，

$$\lim_{t\to a}\frac{a-t}{e^a-e^t}=\lim_{t\to a}\frac{1}{\dfrac{e^a-e^t}{a-t}}=\frac{1}{e^a}$$

であるから，

$$\begin{aligned} r(a) &= \lim_{t\to a}L_a(t)\\ &= \lim_{t\to a}\left|e^te^a+\frac{a-t}{e^a-e^t}e^a\right|\sqrt{1+\frac{1}{e^{2a}}}\\ &= \left|e^{2a}+\frac{1}{e^a}\cdot e^a\right|\sqrt{1+\frac{1}{e^{2a}}}\\ &= (e^{2a}+1)\sqrt{\frac{e^{2a}+1}{e^{2a}}}\\ &= \boldsymbol{\frac{(e^{2a}+1)^{\frac{3}{2}}}{e^a}}\cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

（2） $r(a)=\sqrt{\dfrac{(e^{2a}+1)^3}{e^{2a}}}$ より，$e^{2a}=u$ とおくと $u>0$ であり，

$$r(a)=\sqrt{\frac{(u+1)^3}{u}}$$ となるので，$f(u)=\dfrac{(u+1)^3}{u}$ （$u>0$）とおく．

$r(a)$ の最小値を求めるためには $f(u)$ の最小値を求めればよい．

$$f'(u)=\frac{3(u+1)^2\cdot u-(u+1)^3}{u^2}=\frac{(u+1)^2(2u-1)}{u^2}$$

であるから，$f'(u)=0$ のとき，$u>0$ より，$u=\dfrac{1}{2}$．よって，増減表は次のようになる．

u	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(u)$	／	$-$	0	$+$
$f(u)$	／	↘	最小値	↗

よって，$u=\dfrac{1}{2}$ のとき，$f(u)$ は最小値 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{\frac{1}{2}}=\dfrac{27}{4}$ をとるので，$r(a)$ の最小値は，

$$e^{2a}=\frac{1}{2}\iff a=-\frac{1}{2}\log 2 \text{ のとき，}\sqrt{\frac{27}{4}}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．

◇ ♡

解説

計算量が多いので，要所要所で要領のいい計算が必要になります．特に，$L_a(t)$ を求める部分では，式が複雑になるので置き換えをして書く量を減らしています．また，傾きを利用して計算するとすっきりします．

6 個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 から異なる 3 個の数字を選んで 3 桁の整数を作る．ただし，百の位に 0 がきてはいけない．

（1） 作られる整数は全部で何個あるか．

（2） 奇数は全部で何個あるか．

（3） 3 の倍数は全部で何個あるか．

（4） 作られる整数全部の和を求めよ．

6 個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 から異なる 3 個の数字を選んで 3 桁の整数を作る．ただし，百の位に 0 がきてはいけない．

（1） 作られる整数は全部で何個あるか．

（2） 奇数は全部で何個あるか．

（3） 3 の倍数は全部で何個あるか．

（4） 作られる整数全部の和を求めよ．

【テーマ】：条件をみたす 3 桁の整数とその和

方針

(3) で 3 の倍数の個数を求める方法は，すべての場合を書き出す方法と余りに着目する方法があります．整数全部の和は，各位ごとの和を考えます．

♣ ♠

解答

（1） 百の位は 1〜5 の 5 通り．

十の位は 0〜5 のうち百の位で用いたものを除く 5 通り

一の位は 0〜5 のうち百・十の位で用いたものを除く 4 通り

よって，求める整数の個数は，$5 \times 5 \times 4 =$ **100(個)**……(答)

（2）

一の位は 1, 3, 5 の 3 通り

百の位は 1〜5 のうち一の位で用いたものを除く 4 通り

十の位は 0〜5 のうち百・一の位で用いたものを除く 4 通り

よって，求める整数の個数は，$3 \times 4 \times 4 =$ **48(個)**……(答)

（3） 3 の倍数となるのは各位の数の和が 3 の倍数となるときであり，その組合せは

$\{0, 1, 2\}, \{0, 2, 4\}, \{0, 1, 5\}, \{0, 4, 5\}$

$\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 3, 5\}$

の 8 組である．

0 を含む組 1 つに対して，$2 \times 2 \times 1 = 4$ 通りの数ができるので，$4 \times 4 = 16$ 通り

0 を含まない組 1 つに対して，$3! = 6$ 通りの数ができるので，$6 \times 4 = 24$ 通り

よって，求める整数の個数は，$16 + 24 =$ **40(個)**……(答)

（4） 百の位が 1 である数は，$5 \times 4 = 20$ 通りあり，2〜5 についても同様なので，作られる整数の百の位の和は，

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \times 20 = 15 \times 20 = 300$$

十の位が 1 である数は，$4 \times 4 = 16$ 通りあり，2〜5 についても同様なので，作られる整数の十の位の和は，

$$(1+2+3+4+5)\times 16=15\times 16=240$$

一の位の和も十の位と同様に 240 である.
ゆえに，求める総和は，

$$300\times 100+240\times 10+240=\mathbf{32640}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

別解

(3) は，余りに着目すると次のような解答になります.

0〜5 を 3 で割った余りが 0, 1, 2 となる数の集合をそれぞれ R_0, R_1, R_2 とすると，

$$R_0=\{0,3\},\ R_1=\{1,4\},\ R_2=\{2,5\}$$

となる．異なる 3 つの数の和が 3 の倍数になるためには，R_0, R_1, R_2 の各集合から要素を 1 つずつ取り出せばよい.

R_1, R_2 からの選び方は，$2\times 2=4$ 通り.

その各々に対して，

R_0 から 3 を選ぶとき 3 数の並べ方は，$3!=6$ 通り．したがって，$4\times 6=24$ 通り.

R_0 から 0 を選ぶとき 3 数の並べ方は，$2\times 2=4$ 通り．したがって，$4\times 4=16$ 通り.

よって，求める場合の数は，$24+16=$ **40(個)**……(**答**)

◇ ♡

解説

(3) の問題では，余りに着目する点がポイントです．この解法であれば，すべて書き出す必要がないため，数え漏れがある程度防げるでしょう．4 の倍数に関しても同じようなことがいえます.

x, y, z は実数で，3 つの関係式

$$x + y + z = 0\ ,\ \ x^3 + y^3 + z^3 = 1\ ,\ \ x^4 + y^4 + z^4 = 2$$

をみたしているとき，次の値を求めよ．

（1）xyz　（2）$xy + yz + zx$　（3）$x^2 + y^2 + z^2$　（4）$x^5 + y^5 + z^5$

x, y, z は実数で，3 つの関係式

$$x+y+z=0\ ,\ \ x^3+y^3+z^3=1\ ,\ \ x^4+y^4+z^4=2$$

をみたしているとき，次の値を求めよ．

（1） xyz　　（2） $xy+yz+zx$　　（3） $x^2+y^2+z^2$　　（4） $x^5+y^5+z^5$

【テーマ】：3 次の対称式の計算

方針

まずは，3 次の基本対称式 $x+y+z$, $xy+yz+zx$, xyz を求めることを考えます．そのための誘導設問が (1), (2) になります．与えられた 3 つの式を用い，因数分解の公式を利用して値を求めます．

解答

(1)

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz \\ &= 3xyz \quad (\because\ \ x+y+z=0) \end{aligned}$$

よって，$3xyz=1$ となるので，$xyz=\mathbf{\frac{1}{3}}$……(答)

(2) $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ であるから，$x+y+z=0$ を代入すると，

$$x^2+y^2+z^2=-2(xy+yz+zx)\ \cdots\cdots①$$

ここで，

$$x^4+y^4+z^4=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$

より，$xy+yz+zx=a$ とおくと，

$$\begin{aligned} 2=(-2a)^2-2\{a^2-2xyz(x+y+z)\} &\iff 2=4a^2-2a^2 \\ &\iff a^2=1 \\ &\iff a=\pm 1 \end{aligned}$$

ここで，① より $x^2+y^2+z^2\geqq 0$ であるから $a<0$.

$\therefore\ \ a=-1$. ゆえに，$xy+yz+zx=\mathbf{-1}$……(答)

(3) ① より，$x^2+y^2+z^2=\mathbf{2}$……(答)

(4)

$$\begin{aligned} x^5+y^5+z^5 &= (x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3)-x^2(y^3+z^3)-y^2(x^3+z^3)-z^2(x^3+y^3) \\ &= 2-(x^2y^3+x^2z^3+y^2x^3+y^2z^3+z^2x^3+z^2y^3) \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} x^2y^3+x^2z^3+y^2x^3+y^2z^3+z^2x^3+z^2y^3 &= x^2z^2(x+z)+x^2y^2(x+y)+y^2z^2(y+z) \\ &= -x^2yz^2-x^2y^2z-xy^2z^2 \quad (\because\ \ x+y+z=0) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{3}xz - \frac{1}{3}xy - \frac{1}{3}yz$$
$$= -\frac{1}{3}(xy + yz + zx)$$
$$= \frac{1}{3}$$

したがって，$x^5 + y^5 + z^5 = 2 - \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{5}{3}}$……(答)

別解

(2) 以降の別解です．

$f_n = x^n + y^n + z^n$ とおき，$xy + yz + zx = a$ とすると，解と係数の関係より，x, y, z を 3 解とする 3 次方程式は，

$$t^3 + at - \frac{1}{3} = 0$$

であるから，この式の両辺に t^n をかけて

$$t^{n+3} + at^{n+1} - \frac{1}{3}t^n = 0 \quad \cdots\cdots①$$

x, y, z は ① の 3 解なので，

$$\begin{cases} x^{n+3} + ax^{n+1} - \frac{1}{3}x^n = 0 & \cdots\cdots② \\ y^{n+3} + ay^{n+1} - \frac{1}{3}y^n = 0 & \cdots\cdots③ \\ z^{n+3} + az^{n+1} - \frac{1}{3}z^n = 0 & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

②〜④ の辺々を加えると，

$$f_{n+3} + af_{n+1} - \frac{1}{3}f_n = 0 \quad \cdots\cdots(*)$$

$(*)$ において，$n = 1$ とすると，

$$f_4 + af_2 - \frac{1}{3}f_1 = 0$$

$f_4 = 2, f_1 = 0$ より，

$$2 + af_2 = 0 \quad \cdots\cdots⑤$$

また，$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ より，

$$0 = f_2 + 2a \quad \cdots\cdots⑥$$

⑤, ⑥ より，$2 - 2a^2 = 0$ であるから $a = \pm 1$ となる．$f_2 \geqq 0$ より，⑥ から $a<0$ であるから，$a = -1$.

よって，$\boldsymbol{a = -1,\ f_2 = 2}$……(答)

$(*)$ において $n = 2$ とすると，$f_5 - f_3 - \frac{1}{3}f_2 = 0$

$$f_5 = f_3 + \frac{1}{3}f_2 = 1 + \frac{2}{3} = \mathbf{\frac{5}{3}}\cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

本問は，別解の方法を用いれば，漸化式が出てくるので，さらに次数が高い式でも値を求めることができることがわかると思います．このように汎用性のある解法を知っておくことは難関大学を受験する際には非常に重要なことです．

【問題】

放物線 $y=(x-a)^2+a^2$ を $a \geqq 0$ の範囲で移動させたとき，放物線が通過してできる領域を図示せよ．

放物線 $y=(x-a)^2+a^2$ を $a \geqq 0$ の範囲で移動させたとき，放物線が通過してできる領域を図示せよ.

【テーマ】：曲線の通過領域

方針

曲線が通過する領域内の点を (X, Y) とおいて，X, Y がみたす条件式を求めます．そのためには，与えられた放物線の方程式を a に関する 2 次方程式とみなければいけません.

直線や曲線の通過領域の問題は，よく出題される問題なのですが，なかなかイメージがつかめず，受験生からわかりにくいということをよく聞きます．簡単な例を挙げておきましょう．たとえば，放物線 $y=(x-a)^2+a^2$ が点 $(1, 1)$ を通るかどうかを調べてみましょう．$x=1, y=1$ を代入すると，

$$1=(1-a)^2+1 \iff a=1$$

となるので，$a \geqq 0$ をみたし，$a=1$ のときに，確かに点 $(1, 1)$ を通ることがわかります．では点 $(2, -1)$ は通るでしょうか？同様に代入してみると，

$$-1=(2-a)^2+1 \iff (a-2)^2=-2$$

となり，これをみたすような実数 a は存在しません．よって，与えられた放物線の a にどんな実数を代入しても点 $(2, -1)$ は通らないことがわかります.

つまり，もしもこの放物線が点 (X, Y) を通るのであれば，それに対応する実数 a が存在するはずなのです．ここで大切なことは，X, Y を $(1, 1)$ のように定数として見なければいけないということです．そして，a を $a \geqq 0$ の範囲で動かすので，a を変数と見るのです．それが理解できれば，通過領域の問題は制覇したも同然でしょう！

♣ ♠

解答

放物線 $y=(x-a)^2+a^2$ が通過する領域内の点を (X, Y) とおくと，

$$Y=(X-a)^2+a^2 \iff 2a^2-2Xa+X^2-Y=0$$

をみたす．これが $a \geqq 0$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもてばよい.
ここで，$f(a)=2a^2-2Xa+X^2-Y$ とおくと，

$$f(a)=2\left(a-\frac{X}{2}\right)^2+\frac{1}{2}X^2-Y$$

よって，

（ｉ）　$\dfrac{X}{2} \geqq 0$ のとき　$\dfrac{1}{2}X^2-Y \leqq 0$

または

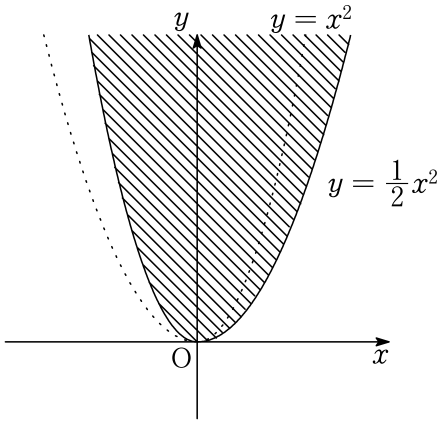
（ii）　$\dfrac{X}{2} \leqq 0$ のとき　$f(0) \leqq 0$

である.

（ｉ）のとき，$X \geqq 0$ かつ $Y \geqq \dfrac{1}{2}X^2$ である.

（ii）のとき，$X \leqq 0$ かつ $X^2-Y \leqq 0$ すなわち $Y \geqq X^2$ である.

ゆえに，求める通過領域は，次図の斜線部分で境界線上の点を含む.



◇ ♡

解説

この問題は，2 次方程式の解の配置問題に帰着します．したがって，解の配置問題がしっかりできていないと解くことはできません．問題によっては，かなり複雑な条件が絡んでくることもありますが，結局考え方は同じなので，あせることはないでしょう．何が定数で何が変数として扱えばよいのかを演習を通して見分けれらるようになることが大切なのです．

次の各問いに答えよ．

（1） $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^{2x}+e^{-x}}\,dx$ の値を求めよ．

（2） $x=\pi-t$ と置換することにより，$\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ の値を求めよ．

次の各問いに答えよ．

（1） $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^{2x}+e^{-x}}\,dx$ の値を求めよ．

（2） $x=\pi-t$ と置換することにより，$\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ の値を求めよ．

【テーマ】：定積分の計算

方針

(1) は $e^x=t$ と置換します．(2) は，問題文中に置換する式が与えられていますが，これだけでは求められないので，再び置換しましょう．

♣ ♠

解答

（1）

$$\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^{2x}+e^{-x}}\,dx=\int_0^1 \frac{e^x(e^x-1)}{e^{3x}+1}\,dx$$

$e^x=t$ とおくと，$e^x\,dx=dt$ となるので，

x	$0 \to 1$
t	$1 \to e$

$$（与式）=\int_1^e \frac{t-1}{t^3+1}\,dt$$

ここで，$\dfrac{t-1}{t^3+1}=\dfrac{a}{t+1}+\dfrac{bt+c}{t^2-t+1}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\frac{t-1}{t^3+1}&=\frac{at^2-at+a+(bt+c)(t+1)}{t^3+1}\\&=\frac{at^2-at+a+bt^2+(b+c)t+c}{t^3+1}\\&=\frac{(a+b)t^2+(-a+b+c)t+a+c}{t^3+1}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{cases}a+b=0\\-a+b+c=1\\a+c=-1\end{cases}$$

であればよい．これを解くと，$a=-\dfrac{2}{3}$，$b=\dfrac{2}{3}$，$c=-\dfrac{1}{3}$ であるから，

$$\begin{aligned}（与式）&=\int_1^e\left(\frac{-\frac{2}{3}}{t+1}+\frac{\frac{2}{3}t-\frac{1}{3}}{t^2-t+1}\right)dt\\&=\frac{1}{3}\int_1^e\left(\frac{-2}{t+1}+\frac{2t-1}{t^2-t+1}\right)dt\\&=\frac{1}{3}\Big[-2\log|t+1|+\log|t^2-t+1|\Big]_1^e\\&=\frac{1}{3}\left[\log\left|\frac{t^2-t+1}{(t+1)^2}\right|\right]_1^e\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\log\frac{e^2-e+1}{(e+1)^2}-\log\frac{1}{4}\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}\log\frac{4(e^2-e+1)}{(e+1)^2}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$x=\pi-t$ とおくと，$dx=-dt$

x	0	→	π
t	π	→	0

であり，$I=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ とおくと，

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}\,(-dt) \\ &= \int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt \\ &= \int_0^{\pi}\left(\frac{\pi\sin t}{1+\cos^2 t}-\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\right)dt \\ 2I &= \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt \\ \therefore\ I &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt \end{aligned}$$

ここで，$\cos t=s$ とおくと，$-\sin t\,dt=ds$

t	0	→	π
s	1	→	-1

となるので，

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{-1}{1+s^2}\,ds \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+s^2}\,ds \end{aligned}$$

さらに，$s=\tan\theta$ とおくと，$ds=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

s	-1	→	1
θ	$-\frac{\pi}{4}$	→	$\frac{\pi}{4}$

となるので，

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}\Big[\,\theta\,\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{2}\left\{\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}}\cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

◇　　　　♡

解説

(1) では，何を t と置換するかで明暗が分かれますが，$\displaystyle\int_1^{e}\frac{t-1}{t^3+1}\,dt$ の形まで変形できたならそこからの道筋は，部分分数分解を利用する方法に絞られます．変形できるようにしておきましょう．

(2) では，問題文中にヒントがありますが，置換を行った後も 2 回置換しなければならず一筋縄ではいかないでしょう．三角関数の積分には，十分慣れ親しんでおきましょう．また，$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+s^2}\,ds$ の形までくれば後は，基本問題です．

実数 x, y が $x^2+y^2 \leqq 1$ をみたしながら変化するとする.

(1) $s=x+y$, $t=xy$ とするとき，点 $(s,\,t)$ の動く範囲を st 平面上に図示せよ.

(2) 負でない定数 $m \geqq 0$ をとるとき，$xy+m(x+y)$ の最大値，最小値を m を用いて表せ.

実数 x, y が $x^2+y^2 \leqq 1$ をみたしながら変化するとする.

(1) $s=x+y,\ t=xy$ とするとき，点 $(s,\ t)$ の動く範囲を st 平面上に図示せよ.

(2) 負でない定数 $m \geqq 0$ をとるとき，$xy+m(x+y)$ の最大値，最小値を m を用いて表せ.

【テーマ】：線形計画法の応用

方針

(1) の置き換えをヒントに (2) を解いていきます．必ず知っておきたい置き換えで，これは問題の見通しをよくするための置き換えになります．ただし，置き換えをしたら必ず制約がついてくることを忘れてはいけません.

頻出といってもよい置き換えです．2 変数を 1 変数にするような変換もありますが，本問の置き換えは，2 変数が 2 変数になるので，一見してメリットがなさそうに見えます．しかし，これは問題の見通しをよくするための変形なので，その効果は後ほどわかってくるでしょう．和と積を新しい文字でおいたので，解と係数の関係を用いて x, y が解となるような 2 次方程式を立式します．あとは，実数条件から s, t のとり得る範囲を求めましょう.

♣ ♠

解答

(1) $x^2+y^2 \leqq 1 \iff (x+y)^2-2xy \leqq 1$

であるから，

$$s^2-2t \leqq 1 \quad \cdots\cdots ①$$

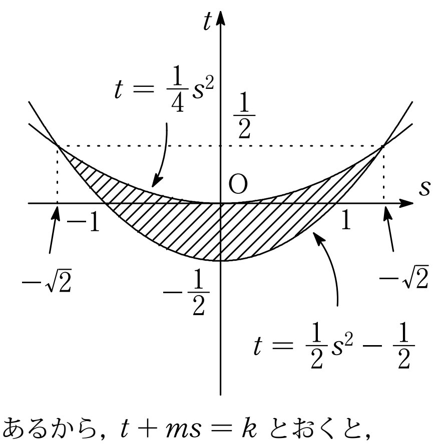
また，x, y は 2 次方程式

$$z^2-sz+t=0$$

の 2 解であり，x, y が実数であることから，この方程式の判別式を D とすると，

$$D=s^2-4t \geqq 0 \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．①, ② より点 $(s,\ t)$ の動く範囲は，下図の斜線部分である（境界線上の点を含む).



(2) $xy+m(x+y)=t+ms$ であるから，$t+ms=k$ とおくと，

$$t=-ms+k \quad \cdots\cdots ③$$

直線 ③ の傾きは $-m \leqq 0$ であるから，k が最大となるのは，③ が点 $\left(\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\right)$ を通るときで，このとき，

$$k=\sqrt{2}m+\frac{1}{2}$$

である.

また, $t=\dfrac{1}{2}s^2-\dfrac{1}{2}$ 上の点 $\left(-\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ における接線の傾きが, $-\sqrt{2}$ となることから, 最小値は次のように場合分けを行う.

(ｉ) $m \geqq \sqrt{2}$ のとき,

k が最小となるのは, ③ が点 $\left(-\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通るときで, このとき,

$$k=-\sqrt{2}m+\frac{1}{2}$$

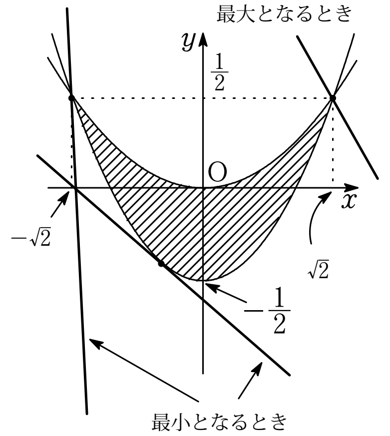
(ii) $0 \leqq m < \sqrt{2}$ のとき,

k が最小となるのは, ③ が $t=\dfrac{1}{2}s^2-\dfrac{1}{2}$ と接するときである.

$$\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2}=-ms+k \iff s^2+2ms-2k-1=0$$

であるから, 判別式を D とすると,

$$D/4=m^2+2k+1=0 \quad \therefore\ k=-\frac{m^2+1}{2}$$



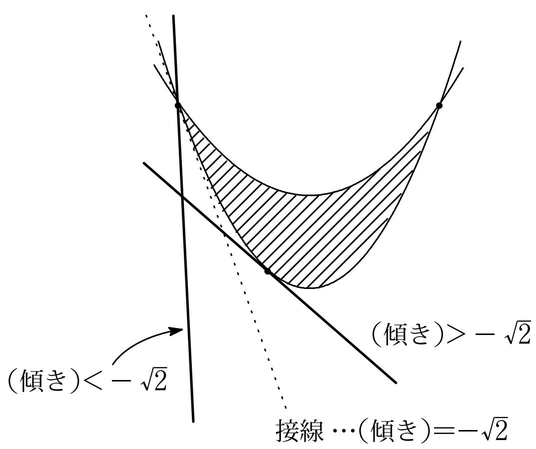
以上より, 求める最大値・最小値は,

$$\begin{cases} \textbf{最大値} \cdots\cdots \ \boldsymbol{\sqrt{2}m+\frac{1}{2}} \\ \textbf{最小値} \cdots\cdots \ \begin{cases} \boldsymbol{-\sqrt{2}m+\frac{1}{2}} & \boldsymbol{(m \geqq \sqrt{2})} \\ \boldsymbol{-\frac{m^2+1}{2}} & \boldsymbol{(0 \leqq m < \sqrt{2})} \end{cases} \end{cases} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

$s=x+y,\ t=xy$ という置き換えを行う際は, $s,\ t$ のとり得る値を求めることを忘れないようにしましょう. これは, $x,\ y$ が実数であるという条件から導かれます. また, 線形計画法の応用問題なので, 図をできるだけ丁寧にかく練習をしておきましょう. 領域の境界が曲線になっているときは接線の傾きに注意を払うことが必要になります. 本問では, 最大値は, 傾きに関係なく $(x,\ y)$ がとる値は同じですが, 最小値を求めるときは, 直線の傾きで場合分けすることが必要になります. この場合分けは, 点 $\left(-\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ における接線の傾きを基準に行うことを理解しておきましょう. 下図を参考にして, 定規などを当てて太実線を平行移動すれば, 最小値をとるときは, 接線の傾きで場合分けが必要であることが理解できるはずです.



2 曲線 $y=\sin 2x$ ， $y=k\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ がある.

（1） $y=\sin 2x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積 S を求めよ.

（2） $y=k\cos x$ が S を 2 等分するときの k の値を求めよ.

2 曲線 $y=\sin 2x$, $y=k\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ がある.

(1)　$y=\sin 2x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積 S を求めよ.

(2)　$y=k\cos x$ が S を 2 等分するときの k の値を求めよ.

【テーマ】：面積２等分問題

方針

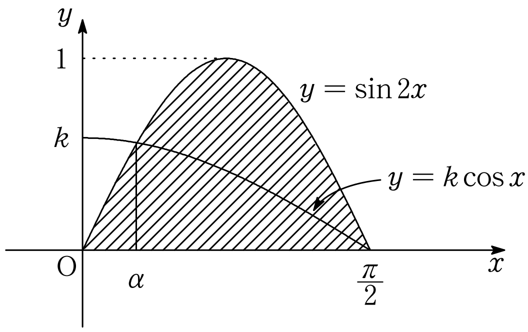
(2) では，$y=\sin 2x$ と $y=k\cos x$ の交点の x 座標を求めたくなりますが，実際に求めることができません．このような場合は，適当な文字 α などで代用します．

♣　♠

解答

(1)

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}(-\cos 2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}\cos\pi + \frac{1}{2}\cos 0 \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ &= \mathbf{1}\cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$



(2)　$\sin 2x = k\cos x$ をみたす x の値を α とすると，

$$\sin 2\alpha = k\cos\alpha \iff k = 2\sin\alpha \cdots\cdots ① \quad (\because \ \cos\alpha \neq 0)$$

をみたす．題意と右上図から，$\alpha \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$y=\sin 2x$, $y=k\cos x$ で囲まれる部分の面積を T とすると，(1) から $T=\dfrac{1}{2}$ となればよい．

$$\begin{aligned} T &= \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - k\cos x)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}(-\cos 2x) - k\sin x\right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} - k + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + k\sin\alpha \end{aligned}$$

$T=\dfrac{1}{2}$ より，

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - k + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + k\sin\alpha$$

$$0 = -k + \frac{1}{2}(1-2\sin^2\alpha) + k\sin\alpha$$

$$0 = -k + \frac{1}{2}\left(1-\frac{k^2}{2}\right) + \frac{k^2}{2} \quad (\because \ ①)$$

$$k^2 - 4k + 2 = 0$$

$$\therefore \ k = 2 \pm \sqrt{2}$$

① より，$k \leqq 2$ であるから，$\boldsymbol{k = 2 - \sqrt{2}}$……(答)

◇ ♡

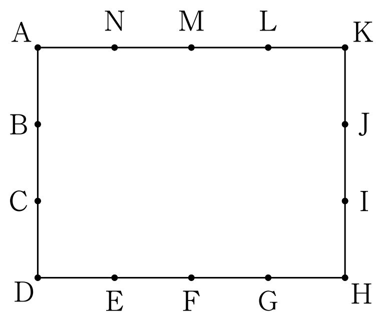
$\boxed{\text{解説}}$

交点の x 座標が求まらないときは，文字で代用するというのは非常に大切な手法です．様々なところで活用できるので，必ず理解しておきましょう．

図のように，A から N までの 14 個の点が，縦の長さが 3 ，横の長さが 4 の長方形の周上に等間隔でのっている．このとき，次の問いに答えよ．

（1） これらの点のうち 3 点を結んでできる三角形は何個あるか．

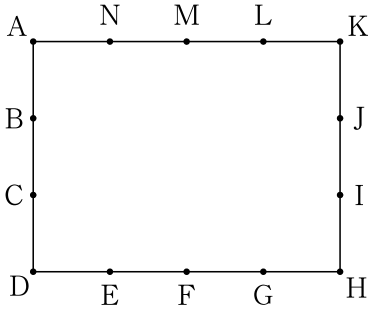
（2） これらの点のうち 3 点を結んでできる二等辺三角形は何個あるか．



図のように，A から N までの 14 個の点が，縦の長さが 3 ，横の長さが 4 の長方形の周上に等間隔でのっている．このとき，次の問いに答えよ．

（1） これらの点のうち 3 点を結んでできる三角形は何個あるか．

（2） これらの点のうち 3 点を結んでできる二等辺三角形は何個あるか．



【テーマ】：数え上げ

方針

14 個の点から 3 点選んでくるだけでは三角形ができるとは限りません．三角形とならない場合を正確に数え上げましょう．また，二等辺三角形を数えるときは，頂点の位置で丁寧に場合分けするとよいでしょう．

♣ ♠

解答

（1） 14 個の点から 3 点を選ぶ場合の数は，

$${}_{14}C_3 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 364 \text{（通り）}$$

このうち 3 点が一直線上にあると三角形はできないので，その場合を除く必要がある．

3 点が線分 AD 上にあるのは，${}_4C_3 = 4$（通り）

線分 KH 上も同様に 4 通り．

3 点が線分 AK 上にあるのは，${}_5C_3 = 10$（通り）

線分 DH 上も同様に 10 通り．

よって，求める三角形の個数は，

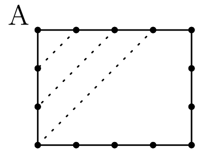
$364 - 2 \times 4 - 2 \times 10 =$ **336(個)**……(答)

（2） 二等辺三角形の等辺の交点を P とする．

（ｉ） P が点 A にあるとき，

△ABN, △ACM, △ADL の 3 通り

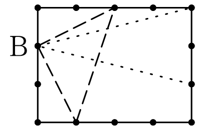
P が D, H, K にあるときも同様なので，$3 \times 4 = 12$（個）



（ii） P が点 B にあるとき，

△BME, △BKI の 2 通り

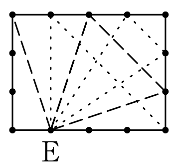
P が C, I, J にあるときも同様なので，$4 \times 2 = 8$（個）



（iii） P が点 E にあるとき，

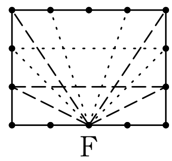
△EAI, △ENH, △EMI, △ELJ, △EMA の 5 通り

P が G, N, L にあるときも同様なので，$4 \times 5 = 20$（個）



（iv） P が点 F にあるとき，

△FLN, △FKA, △FBJ, △FCI の 4 通り



P が M にあるときも同様なので，$4 \times 2 = 8$（個）

ゆえに，求める二等辺三角形の個数は，

$12 + 8 + 20 + 8 =$ **48(個)**……(答)

解説

本問のように，地道に数え上げる問題は闇雲に数えてはいけません．自分なりに数える規則を作って漏れがないような数え方を工夫しましょう．**解答** では，二等辺三角形の頂点の位置で場合分けして数えています．

?

(1) $\displaystyle\int_0^x \sin^2(x-t)\cos t\,dt - \int_0^x \cos(x-t)\sin^2 t\,dt$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+e^x}\,dx$

？

(1)　$\displaystyle\int_0^x \sin^2(x-t)\cos t\,dt-\int_0^x \cos(x-t)\sin^2 t\,dt$

(2)　$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+e^x}\,dx$

【テーマ】：定積分の計算

方針

(1)　$\theta = x - t$　と　に　と (2)　$[-1,\,0],\,[0,\,1]$、　が　と

♣　♠

解答

(1)　$\theta = x - t$　、　$d\theta = -dt$

t	$0\ \rightarrow\ x$
θ	$x\ \rightarrow\ 0$

$$
\begin{aligned}
(\quad) &= \int_x^0 \sin^2\theta\cos(x-\theta)\,(-d\theta)-\int_x^0 \cos\theta\sin^2(x-\theta)\,(-d\theta)\\
&= \int_0^x \sin^2\theta\cos(x-\theta)\,d\theta-\int_0^x \cos\theta\sin^2(x-\theta)\,d\theta\\
&= \int_0^x \sin^2 t\cos(x-t)\,dt-\int_0^x \cos t\sin^2(x-t)\,dt
\end{aligned}
$$

と

$$2\left(\int_0^x \sin^2(x-t)\cos t\,dt-\int_0^x \cos(x-t)\sin^2 t\,dt\right)=0$$

、

$$\int_0^x \sin^2(x-t)\cos t\,dt-\int_0^x \cos(x-t)\sin^2 t\,dt=\mathbf{0}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$\displaystyle(\quad)=\int_{-1}^0 \frac{x^2}{1+e^x}\,dx+\int_0^1 \frac{x^2}{1+e^x}\,dx$

、　1　？　$x = -t$　、　$dx = -dt$

x	$-1\ \rightarrow\ 0$
t	$1\ \rightarrow\ 0$

と

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^0 \frac{x^2}{1+e^x}\,dx &= \int_1^0 \frac{t^2}{1+e^{-t}}\,(-dt)\\
&= \int_0^1 \frac{t^2}{1+e^{-t}}\,dt\\
&= \int_0^1 \frac{t^2e^t}{e^t+1}\,dt\\
&= \int_0^1 \frac{x^2e^x}{e^x+1}\,dx
\end{aligned}
$$

、

$$
\begin{aligned}
(\quad) &= \int_0^1 \frac{x^2e^x}{e^x+1}\,dx+\int_0^1 \frac{x^2}{e^x+1}\,dx\\
&= \int_0^1 \frac{x^2(e^x+1)}{e^x+1}\,dx\\
&= \int_0^1 x^2\,dx
\end{aligned}
$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

解説

(1)

(2)

【定積分の性質】

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$$

【問題】

x $f_n(x)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$$f_1(x)=x^2+2x-2,\ x^2 f_{n+1}(x)-x^3+x^2=\int_0^x t f_n(t)\,dt$$

(1) $f_2(x)$

(2) $f_n(x)$ x 2

(3) $f_n(x)$

x $f_n(x)$ $(n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$

$$f_1(x)=x^2+2x-2,\; x^2 f_{n+1}(x)-x^3+x^2=\int_0^x t f_n(t)\,dt$$

(1) $f_2(x)$

(2) $f_n(x)$ x 2 ⊠

(3) $f_n(x)$

【テーマ】：積分方程式と漸化式

方針

(1) $n=1$ (2) (3) (2) ?
n ? ?

n (3) $f_n(x)=a_nx^2+b_nx+c_n$ $(a \neq 0)$ ⊠

♣ ♠

解答

(1) $n=1$

$$\begin{aligned}
x^2 f_2(x)-x^3+x^2 &= \int_0^x t f_1(t)\,dt \\
&= \int_0^x t(t^2+2t-2)\,dt \\
&= \int_0^x (t^3+2t^2-2t)\,dt \\
&= \left[\,\frac{1}{4}t^4+\frac{2}{3}t^3-t^2\,\right]_0^x \\
&= \frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-x^2
\end{aligned}$$

$$f_2(x)-x+1=\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{3}x-1 \quad \therefore\ \boldsymbol{f_2(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{3}x-2}\cdots\cdots(答)$$

(2) **【証明】**

$f_n(x)$ 2 $f_n(x)=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ ⊠ ?

(ⅰ) $n=1$

$f_1(x)=x^2+2x-2$

(ⅱ) $n=k$

$f_k(x)=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$

$$
\begin{aligned}
x^2 f_{k+1}(x) - x^3 + x^2 &= \int_0^x t f_k(t)\,dt \\
&= \int_0^x (at^3 + bt^2 + ct)\,dt \\
&= \frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{3}bx^3 + \frac{1}{2}cx^2 \\
\therefore\ x^2 f_{k+1}(x) &= \frac{1}{4}ax^4 + \left(\frac{1}{3}b + 1\right)x^3 + \left(\frac{1}{2}c - 1\right)x^2 \\
\therefore\ f_{k+1}(x) &= \frac{1}{4}ax^2 + \left(\frac{1}{3}b + 1\right)x + \frac{1}{2}c - 1
\end{aligned}
$$

$a \neq 0$、 $f_{k+1}(x)$ x 2 、 $n = k + 1$

（ｉ），（ii） n $f_n(x)$ x 2 、 （証明終）

(3) $f_n(x) = a_n x^2 + b_n x + c_n \ (a_n \neq 0)$ 、 (2)

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{4}a_n x^2 + \left(\frac{1}{3}b_n + 1\right)x + \frac{1}{2}c_n - 1$$

$$
\begin{cases}
a_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n & \cdots ① \\
b_{n+1} = \dfrac{1}{3}b_n + 1 & \cdots ② \\
c_{n+1} = \dfrac{1}{2}c_n - 1 & \cdots ③
\end{cases}
$$

$a_1 = 1,\ b_1 = 2,\ c_1 = -2$、 ①

$$a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

、 ②

$$b_{n+1} - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\left(b_n - \frac{3}{2}\right) \iff b_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{3}{2}$$

③

$$c_{n+1} + 2 = \frac{1}{2}(c_n + 2) \iff c_n = (c_1 + 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2 \qquad \therefore\ c_n = -2$$

$$\boldsymbol{f_n(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} x^2 + \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{3}{2}\right\} x - 2} \cdots\cdots \text{(答)}$$

◇ ♡

解説

n ? 、

【問題】

a, b x

$$\cos 2x - 4a\cos x + 2b + 1 = 0$$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$

(1) $t = \cos x$ t、

(2) 4 a, b

(3) ? (2)、 (a, b)

a, b x

$$\cos 2x - 4a\cos x + 2b + 1 = 0$$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$

(1) $t = \cos x$ t

(2) 4 a, b

(3) ? (2) (a, b)

【テーマ】：三角方程式の実数解の個数

方針

? ? t 1 x 1 ? t x

$0 \leqq x \leqq 2\pi$?

$x = \pi$ t 1 x 1

$x \fallingdotseq \pi$ t 1 x 2

? sin cos

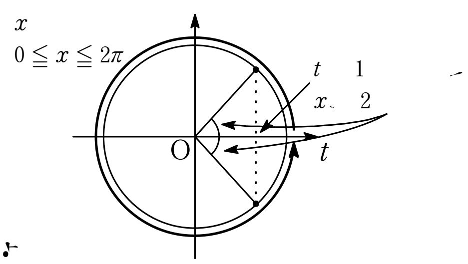
解答

(1) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$$\cos 2x - 4a\cos x + 2b + 1 = 0 \iff 2\cos^2 x - 4a\cos x + 2b = 0$$

$t = \cos x$

$$\boldsymbol{2t^2 - 4at + 2b = 0} \cdots\cdots(答)$$



(2) $t = \cos x$ $0 \leqq x \leqq 2\pi$ $-1 \leqq t \leqq 1$

$x = \pi$ t 1 x 1

$x \fallingdotseq \pi$ t 1 x 2

4

$$2t^2 - 4at + 2b = 0$$

$-1 < t \leqq 1$ 2 ? $f(t)$

$$\begin{aligned} f(t) &= 2t^2 - 4at + 2b \\ &= 2(t-a)^2 - 2a^2 + 2b \end{aligned}$$

（ｉ） $-1<a \leqq 1$ ……①

（ii） $f(-1)>0$ かつ $f(1) \geqq 0$

（iii） $-2a^2+2b<0$

であればよい．

（ii）のとき，

$$f(-1)=2+4a+2b>0 \iff b>-2a-1 \quad \cdots\cdots②$$
$$f(1)=2-4a+2b \geqq 0 \iff b \geqq 2a-1 \quad \cdots\cdots③$$

（iii）のとき，$b<a^2$…④

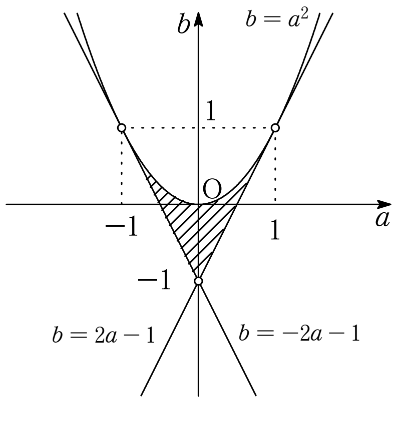
以上より，①〜④ から，a, b の条件は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{-1<a \leqq 1} \\ \boldsymbol{b>-2a-1} \\ \boldsymbol{b \geqq 2a-1} \\ \boldsymbol{b<a^2} \end{cases} \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) (2) より，点 (a, b) の存在範囲は，下図の斜線部分である．

境界は，$b=2a-1$ 上の点 $((1, 1), (0, -1)$ を除く$)$ のみ含み，他は含まない．



◇ ♡

解説

前述したように本問は，t と x の関係がしっかりと把握できれば，2 次関数の解の配置問題となります．領域の図示では，境界線上の点を含むか否かを正確に述べる必要があるとともに，除く点は白丸などを用いて図示できるようにしておきましょう．

【問題】

定積分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ について，次の問いに答えよ．ただし，n は 0 以上の整数とする．

（1） $n \geqq 2$ として，$I_n = K_n I_{n-2}$ となる K_n を求めよ．

（2） $I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx$ を求めよ．

（3） $I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,dx$ を求めよ．

定積分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ について，次の問いに答えよ．ただし，n は 0 以上の整数とする．

(1)　$n \geqq 2$ として，$I_n = K_n I_{n-2}$ となる K_n を求めよ．

(2)　$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx$ を求めよ．

(3)　$I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,dx$ を求めよ．

【テーマ】：定積分と漸化式

方針

部分積分法を用いて，I_n に関する漸化式を立式します．

♣　♠

解答

(1)　部分積分法を用いて，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^{n-1} x\,dx \\
&= \Big[-\cos x \cdot \sin^{n-1} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)\cdot(n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x\,dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x\,dx \\
&= (n-1)\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx\right\} \\
&= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \\
nI_n &= (n-1)I_{n-2}
\end{aligned}$$

$n \neq 0$ より，$I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ となるので，$\boldsymbol{K_n = \dfrac{n-1}{n}}$……(答)

(2)　(1) より，

$$\begin{aligned}
I_5 &= \frac{4}{5} I_3 \\
&= \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} I_1 \\
&= \frac{8}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \\
&= \frac{8}{15}\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{8}{15}\{0-(-1)\} \\
&= \boldsymbol{\frac{8}{15}}
\end{aligned}$$

……(答)

(3)　(1) より，

$$\begin{aligned} I_6 &= \frac{5}{6}I_4 \\ &= \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}I_2 \\ &= \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0 \\ &= \frac{5}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \\ &= \frac{5}{16}\cdot\frac{\pi}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{5}{32}\pi}\cdots\cdots\textbf{(答)} \end{aligned}$$

◇　♡

解説

本問のように，定積分が n に依存しているような問題は，漸化式を作って解答する場合が多いので，代表的な問題には当たっておくとよいでしょう．例えば，

$$\int \sin^n x\,dx,\ \int \cos^n x\,dx,\ \int \tan^n x\,dx,\ \int (\log x)^n\,dx \quad \text{（積分区間は省略）}$$

のようなものです．大抵の問題は，誘導形式で出題されますが，難関大学や難関学部を志望している人は，誘導なしでも解けるようにしておきましょう．

三角形 ABC があり，各辺の長さを $AB = 6,\ BC = 5,\ CA = 7$ とする．辺 AB 上に点 D，AC 上に点 E をとって，三角形 ADE を作る．三角形 ADE の面積が三角形 ABC の面積の $\dfrac{1}{3}$ であるとき，次の各問いに答えよ．

（1） 線分 AD と AE の長さの積を求めよ．

（2） DE の最小値を求めよ．

三角形 ABC があり，各辺の長さを $AB=6$, $BC=5$, $CA=7$ とする．辺 AB 上に点 D，AC 上に点 E をとって，三角形 ADE を作る．三角形 ADE の面積が三角形 ABC の面積の $\dfrac{1}{3}$ であるとき，次の各問いに答えよ．

（1） 線分 AD と AE の長さの積を求めよ．

（2） DE の最小値を求めよ．

【テーマ】：三角形を二分する線分の最小値

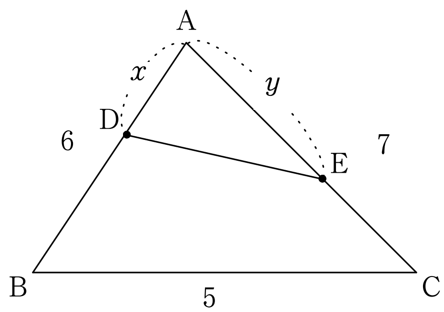
方針

$AD=x$, $AE=y$ とおいて，面積の条件から xy を求めることができます．DE の最小値は，余弦定理を利用して，DE を xy で表すことから始めよう．

東京工業大学・京都大学など，様々な大学で類題が出題されています．それらの大学では，辺の長さに文字が入っていたりして，場合分けが必要になったりするものがあります．本問はその中でも一番易しいタイプです．比較的見通しが立つので，解きやすい問題になっています．最小値は，相加平均・相乗平均の関係をうまく利用できるかどうかがポイントになります．

相加平均・相乗平均の関係が使える場面では，文字が 0 以上であることと，和と積の関係から最大値・最小値を求める．また，逆数の形があるなど，ある程度決まった状況が多いので，演習を通して経験しておくことが必要です．

解答



（1） $AD=x$, $AE=y$ とおくと，

$$\triangle ADE=\frac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot\sin A$$
$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7\cdot\sin A$$

である．また，題意より $\triangle ABC=3\triangle ADE$ であるから，

$$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7\cdot\sin A=3\cdot\frac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot\sin A$$
$$\iff \quad \boldsymbol{xy=14}\cdots\cdots(\text{答}) \quad \cdots\cdots①$$

（2） $\triangle ABC$ で余弦定理より，

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{36+49-25}{2\cdot 6\cdot 7}\\ &= \frac{60}{2\cdot 6\cdot 7}\\ &= \frac{5}{7} \quad \cdots\cdots②\end{aligned}$$

$\triangle ADE$ で余弦定理より，

$$\begin{aligned}DE^2 &= x^2+y^2-2\cdot x\cdot y\cdot\cos A\\ &= x^2+y^2-2\cdot 14\cdot\frac{5}{7} \quad (\because ①, ②)\\ &= x^2+y^2-20\end{aligned}$$

ここで，$x^2>0$, $y^2>0$ より，相加平均・相乗平均の関係から，

$$x^2+y^2\geqq 2\sqrt{x^2\cdot y^2}=2xy=28 \quad (\because ①)$$

等号は，$x^2=y^2$ すなわち $x=y=\sqrt{14}$ のとき成り立つ．ゆえに，

$$\mathrm{DE}^2 \geqq 28-20=8$$

DE>0 であるから，$\mathrm{DE} \geqq 2\sqrt{2}$ である．ゆえに，DE の最小値は，$\mathrm{AD}=\mathrm{AE}=\sqrt{14}$ のとき，$\boldsymbol{2\sqrt{2}}$……(答)

♢ ♡

解説

最大値・最小値を求める方法は，様々な方法があります．2 次関数であれば平方完成をすればいいし，3 次関数以上なら微分して増減表を書けば求めることができます．三角関数や指数関数・対数関数も置き換えなどを用いてやれば 2 次関数や 3 次関数に帰着できることが多々あります．しかし，それ以外にも分数の形をしたものや本問のように 2 変数のものなど様々なものがあります．それらに関しても最大値・最小値を求める手段はいろいろあるのです．その一つの方法が相加平均・相乗平均の関係です．シュワルツの不等式を用いる問題もあります．最大値・最小値に関する問題は入試では頻出なので，より多くの経験を積んでおきましょう．

平面上に四角形 ABCD がある．この平面上の任意の 2 点 P, Q に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\overrightarrow{\mathrm{QA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QC}}-\overrightarrow{\mathrm{QB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QD}}$$

が成り立つとき，四角形 ABCD はどのような四角形か.

平面上に四角形 ABCD がある．この平面上の任意の 2 点 P, Q に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\overrightarrow{\mathrm{QA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QC}}-\overrightarrow{\mathrm{QB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QD}}$$

が成り立つとき，四角形 ABCD はどのような四角形か．

【テーマ】：ベクトルの表す図形

方針

始点を揃えて式を変形します．最後は，始点にこだわらず式を変形し，P, Q が平面上の任意の点であることを用います．

♣ ♠

解答

始点を A にそろえると，

$$-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=-\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AQ}})-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AQ}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AQ}})$$

$$\begin{aligned}
\iff\ & -\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2\\
&\quad=-\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|^2\\
\iff\ & \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})\\
\iff\ & (\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AQ}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})=0\\
\iff\ & \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})=0
\end{aligned}$$

P, Q は平面上の任意の点であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{0}\qquad\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

ゆえに，**四角形 ABCD は平行四辺形である．**……(答)

♢ ♡

解説

この問題のポイントは，2 つあります．一つ目は，始点を A にそろえて式を変形していく点です．二つ目は，最後のところで，2 点 P, Q が平面上の任意の点であるという点です．この 2 点が平面上の任意の点であるということは，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は平面上の任意のベクトルであることと同値です．したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})=0$$

が成り立つためには，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{0}$ でなければならないという風に考えます．問題文で 2 点 P, Q は異なる点とは一言も書いていないので，安易に $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\neq\vec{0}$ としないようにしましょう．

【問題】

$n \geqq 2$ とする．無限級数

$$x^n + x^{n-1}\sin x + x^{n-2}\sin^2 x + \cdots\cdots + x^{n-k}\sin^k x + \cdots\cdots$$

がある．ただし，x は $x \fallingdotseq 0$ をみたす実数とする．

（1） 与えられた無限級数は収束することを示し，その和 $f_n(x)$ を求めよ．

（2） $x \geqq 0$ のとき，不等式 $x - \dfrac{x^3}{6} \leqq \sin x \leqq x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$ が成り立つことを証明せよ．

（3） $\displaystyle\lim_{x \to +0} f_2(x)$ の値を求めよ．

$n \geqq 2$ とする．無限級数

$$x^n + x^{n-1}\sin x + x^{n-2}\sin^2 x + \cdots\cdots + x^{n-k}\sin^k x + \cdots\cdots$$

がある．ただし，x は $x \fallingdotseq 0$ をみたす実数とする．

(1) 与えられた無限級数は収束することを示し，その和 $f_n(x)$ を求めよ．

(2) $x \geqq 0$ のとき，不等式 $x - \dfrac{x^3}{6} \leqq \sin x \leqq x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$ が成り立つことを証明せよ．

(3) $\displaystyle\lim_{x \to +0} f_2(x)$ の値を求めよ．

【テーマ】：無限等比級数の和

方針

与えられた無限級数が，無限等比級数であることを見抜きます．その公比が 1 より小さければ，無限等比級数の和が収束することを用いて，和を計算します．(3) では，(2) で示した不等式を用いて，はさみうちの原理を利用します．

♣ ♠

解答

(1) 与えられた無限級数は，

$$x^n + x^n\frac{\sin x}{x} + x^n\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \cdots\cdots + x^n\left(\frac{\sin x}{x}\right)^k + \cdots\cdots$$

と変形できるので，初項 x^n ，公比 $\dfrac{\sin x}{x}$ の無限等比級数である．ここで，$f(x) = x - \sin x$ とおくと，

$$f'(x) = 1 - \cos x \geqq 0$$

であるから，$f(x)$ は単調増加である．$f(0) = 0$ であるから，

$$\begin{cases} x>0 \text{ のとき，} \quad x > \sin x \cdots\cdots ① \\ x<0 \text{ のとき，} \quad x < \sin x \end{cases}$$

が成り立つので，$x \fallingdotseq 0$ で，$-1 < \dfrac{\sin x}{x} < 1$ である．ゆえに，与えられた無限級数は収束し，その和は，

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{x^n}{1 - \dfrac{\sin x}{x}} \\ &= \boldsymbol{\frac{x^{n+1}}{x - \sin x}} \cdots\cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) **【証明】**

$g(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$ とおくと，

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \\ g''(x) &= -\sin x + x \geqq 0 \quad (\because\ x \geqq 0, ①) \end{aligned}$$

ゆえに，$g'(x)$ は単調増加であり，$g'(0) = 0$ であるから，$g'(x) \geqq 0$ が成り立つので，$g(x)$ は単調増加である．さらに，$g(0) = 0$ であるから，$g(x) \geqq 0$ が成り立ち，

$$x-\frac{x^3}{6} \leqq \sin x$$

が示された．次に，$h(x)=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}-\sin x$ とおくと，同様にして，

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cos x \\ h''(x) &= -x+\frac{x^3}{6}+\sin x \\ &= g(x) \geqq 0 \end{aligned}$$

ゆえに，$h'(x)$ は単調増加であり，$h'(0)=0$ であるから，$h'(x) \geqq 0$ が成り立つので，$h(x)$ は単調増加である．さらに，$h(0)=0$ であるから，$h(x) \geqq 0$ が成り立ち，

$$\sin x \leqq x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$

が示された．ゆえに，与えられた不等式は示された．　**(証明終)……(答)**

(3)　(1) より，$f_n(x)=\dfrac{x^{n+1}}{x-\sin x}$ であるから，

$$f_2=\frac{x^3}{x-\sin x}$$

である．ここで，求める極限は $x \to +0$ であるから，$x>0$ で考えてよいので，(2) の不等式より，

$$\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120} \leqq x-\sin x \leqq \frac{x^3}{6} \iff \frac{1}{6}-\frac{x^2}{120} \leqq \frac{x-\sin x}{x^3} \leqq \frac{1}{6}$$

が成り立つので，$x \to +0$ のとき，はさみうちの原理より，

$$\lim_{x\to+0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$$

である．ゆえに，

$$\lim_{x\to+0} f_2(x)=\lim_{x\to+0}\frac{x^3}{x-\sin x}=\frac{1}{\frac{1}{6}}=\mathbf{6}\text{……(答)}$$

◇　♡

解説

(2) で証明している不等式は，入試でもしばしば見られるものです．また，このように不等式を証明させておいて，極限を求めるような問題の場合は，ほぼ間違いなくはさみうちの原理を用いて極限を求めます．このような解答の流れをしっかりと理解しておくことで様々な応用問題に対応できるようになります．

(1) では，無限等比級数が収束することをいうために，公比 $\dfrac{\sin x}{x}$ の値の範囲が $-1<\dfrac{\sin x}{x}<1$ になることを証明しなければいけません．**解答** で用いている考え方は，分母と分子の大小関係に着目するため，$f(x)=x-\sin x$ とおいています．この証明なしに，「収束するので …」と述べると説明不足として点が与えられなくなるので要注意です．

(2) では，素直に大きいほうから小さいほうを引いて 0 以上になることを示します．

(3) では，(2) で証明した不等式を用いますが，まず $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ を求めてから，最後に逆数を取って極限の値を求めます．直接求めることが面倒であったり，困難である場合は，このような手法をとることがあります．

n を自然数とするとき，次の問いに答えよ．

（1） 不等式 $n! \geqq 2^{n-1}$ を示せ．

（2） 不等式 $\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}<2$ を示せ．

（3） 不等式 $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}<3$ を示せ．

n を自然数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $n! \geqq 2^{n-1}$ を示せ．

(2) 不等式 $\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}<2$ を示せ．

(3) 不等式 $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}<3$ を示せ．

【テーマ】：数学的帰納法と不等式の証明

方針

(1) は数学的帰納法で証明します．(2) は (1) で示した不等式を用いて証明します．(3) は二項定理を用いて左辺を展開しましょう．

解答

(1) **【証明】**

(ⅰ) $n=1$ のとき，

$$(\text{左辺})=1!=1,\quad (\text{右辺})=2^{1-1}=1$$

よって，$n=1$ のとき，成り立つ．

(ⅱ) $n=k$ すなわち

$$k! \geqq 2^{k-1} \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つと仮定すると，① の両辺に $k+1>0$ をかけて，

$$(k+1)! \geqq (k+1)2^{k-1} \geqq 2\cdot 2^{k-1} \quad (\because \ \ k \geqq 1)$$

よって，$(k+1)! \geqq 2^k$ となり，$n=k+1$ のときも成り立つ．

ゆえに，(ⅰ),(ⅱ) より，すべての自然数 n に対して，$n! \geqq 2^{n-1}$ が成り立つことが示された． **【証明終】**

(2) **【証明】**

(1) より，$n! \geqq 2^{n-1}$ であるから，

$$\frac{1}{n!} \leqq \frac{1}{2^{n-1}}$$

が成り立つ．この式に $n=1, 2, 3, \cdots$ を代入すると，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1!} &\leqq \frac{1}{1}\\
\frac{1}{2!} &\leqq \frac{1}{2}\\
\frac{1}{3!} &\leqq \frac{1}{2^2}\\
&\ \vdots\\
\frac{1}{n!} &\leqq \frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

となるので，辺々加えると，

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\leqq\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

である．この式の右辺は，初項 1，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列の和であるから，

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}<2\quad\left(\because\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n<1\right)$$

ゆえに，示された．　　【証明終】

(3)　**【証明】**

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\\&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\&=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{n}\right)^k\\&=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{n^k}\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{n^k}&=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}\\&=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}\cdot\frac{1}{k!}\\&=1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!}\\&\leqq\frac{1}{k!}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&\leqq1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\\&<1+2\quad(\because\ (2))\\&=3=(\text{右辺})\end{aligned}$$

となり，示された．　　【証明終】

◇　　♡

解説

(3) を証明するために，(1), (2) で準備をしています．証明の流れをしっかりとつかみましょう．(3) は式変形に経験がないと難問です．難関大学を受験する人は，一度は経験しておきたい問題です．

(1) は，自然数 n に関する不等式の証明なので，数学的帰納法が有効でしょう．この問いは完答しなければいけません．

(2) は，右辺が n の式ではないため数学的帰納法で証明することができません．したがって，解答 では，(1) を利用して解答しています．

(3) は，左辺を二項定理で書き下すという発想が必要になります．

微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$ が次の 4 条件を満たしている.

（a） 任意の正の実数 x について $f(x)>0$, $g(x)>0$

（b） 任意の実数 x について $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$

（c） 任意の実数 x, y について $f(x+y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$

（d） $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=2$

このとき以下の各問いに答えよ.

（1） $f(0)$ および $g(0)$ を求めよ.

（2） $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2$ を求めよ.

（3） $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-f(x)}{x^2}$ を求めよ.

（4） $f(x)$ の導関数を $g(x)$ を用いて表せ.

（5） 曲線 $y=f(x)g(x)$，直線 $x=a$ $(a>0)$ および x 軸で囲まれる図形の面積が 1 のとき $f(a)$ の値を求めよ.

微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$ が次の 4 条件を満たしている.

(a) 任意の正の実数 x について $f(x)>0$, $g(x)>0$

(b) 任意の実数 x について $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$

(c) 任意の実数 x, y について $f(x+y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=2$

このとき以下の各問いに答えよ.

(1) $f(0)$ および $g(0)$ を求めよ.

(2) $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-f(x)}{x^2}$ を求めよ.

(4) $f(x)$ の導関数を $g(x)$ を用いて表せ.

(5) 曲線 $y=f(x)g(x)$, 直線 $x=a$ $(a>0)$ および x 軸で囲まれる図形の面積が 1 のとき $f(a)$ の値を求めよ.

【テーマ】:関数方程式

方針

$x=y=0$ を代入したり, $y=-x$ を代入したり, 微分の定義式を用いたりして計算します.

解答

(1) 条件 (b) に $x=0$ を代入すると,

$$g(0)=\mathbf{0}\cdots\cdots(\text{答})$$

条件 (c) に $x=y=0$ を代入すると,

$$f(0)=f(0)\cdot f(0) \iff \{f(0)\}^2-f(0)=0 \qquad \therefore\ f(0)=0,\,1$$

ここで, 条件 (c) に $x=0$, $y=1$ を代入すると,

$$f(1)=f(0)\cdot f(1)+g(0)\cdot g(1) \iff f(1)\{1-f(0)\}=0$$

$f(1)>0$ より, $f(0)=1$ であるから, $f(0)=\mathbf{1}\cdots\cdots$(答)

(2) 条件 (c) に $y=-x$ を代入して,

$$f(0)=f(x)\cdot f(-x)+g(x)\cdot g(-x) \iff 1=f(x)\cdot f(x)+g(x)\cdot(-g(x)) \quad (\because\ (\mathrm{b}))$$

よって, $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=\mathbf{1}\cdots\cdots$(答)

(3) (2) より,

$-\{g(x)\}^2=1-\{f(x)\}^2=\{1-f(x)\}\{1+f(x)\}$ より,

$$-\frac{\{g(x)\}^2}{x^2}=\frac{1-f(x)}{x}\cdot\frac{1+f(x)}{x}$$

よって，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-f(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+f(x)}\cdot\left\{-\left(\frac{g(x)}{x}\right)^2\right\}\\ &= \frac{1}{1+f(0)}\cdot(-4) \qquad (\because\ (\mathrm{d}))\\ &= \boldsymbol{-2}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)+g(x)g(h)-f(x)}{h} \qquad (\because\ (\mathrm{c}))\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)(f(h)-1)+g(x)g(h)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(-f(x)\cdot\frac{1-f(h)}{h^2}\cdot h+\frac{g(x)g(h)}{h}\right)\\ &= -f(x)\cdot(-2)\cdot 0+g(x)\cdot 2\\ &= \boldsymbol{2g(x)}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

(5)　条件 (a) より，$x>0$ で $y=f(x)g(x)$ は常に正であり，$g(0)=0$, $f(0)=1$ より，求める図形の面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S &= \int_0^a f(x)g(x)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^a f(x)f'(x)\,dx \qquad (\because\ (4))\\ &= \left[\ \frac{1}{4}\{f(x)\}^2\ \right]_0^a\\ &= \frac{1}{4}\left[\{f(a)\}^2-\{f(0)\}^2\right]\\ &= \frac{1}{4}(\{f(a)\}^2-1)\end{aligned}$$

$S=1$ より，

$$4=\{f(a)\}^2-1 \iff \{f(a)\}^2=5$$

$f(a)>0$ より，$f(a)=\boldsymbol{\sqrt{5}}\cdots\cdots(\text{答})$

◇　♡

解説

関数方程式の問題は，何かの関数がモデルになっていることが多いです．本問は，条件 (b), (c) から三角関数の一種ではないかという予想がつきます．実際は，双曲線関数がモデルになっているようです．（双曲線関数については，大学で学習するので，高校数学の範囲外です．）関数方程式は，$x=y=0$ などを代入したり，$y=-x$ を代入したりと，解き方がある程度決まっているので，何題か演習してコツをつかんでおきましょう．

数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 1$ であるとし，この数列の初項から第 n 項までの和 S_n は $a_n = -2S_nS_{n-1}$ $(n = 2, 3, \cdots)$ をみたすとする．このとき，次の問いに答えよ．

（1） a_2 と a_3 を求めよ．

（2） n が自然数であるとき，$0 < S_n \leqq 1$ であることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

（3） a_n を求めよ．

数列 $\{a_n\}$ は $a_1=1$ であるとし，この数列の初項から第 n 項までの和 S_n は $a_n=-2S_nS_{n-1}$ $(n=2,\ 3,\ \cdots)$ をみたすとする．このとき，次の問いに答えよ．

（1） a_2 と a_3 を求めよ．

（2） n が自然数であるとき，$0<S_n\leqq 1$ であることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

（3） a_n を求めよ．

【テーマ】：数学的帰納法

方針

(1) は，与式に $n=2$ を代入し，$S_2=a_1+a_2$ を利用して，a_2 に関する 1 次方程式を作ります．a_3 も同様にします．(2) は指示通り数学的帰納法で証明しますが，不等式の評価をどのようにするかがポイントです．(3) は S_n に関する漸化式を立式して S_n を求めてから a_n を求めます．

♣ ♠

解答

（1） 与式に $n=2$ を代入して，

$$a_2=-2S_2S_1 \iff a_2=-2(a_1+a_2)a_1 \iff a_2=-2(1+a_2) \qquad (\because\ \ a_1=1)$$

よって，$3a_2=-2$ $\qquad\therefore\ \ a_2=-\boldsymbol{\frac{2}{3}}$……(答)

同様に，$n=3$ を代入して，

$$\begin{aligned} a_3=-2S_3S_2 &\iff a_3=-2(a_1+a_2+a_3)(a_1+a_2)\\ &\iff a_3=-2\left(1-\frac{2}{3}+a_3\right)\left(1-\frac{2}{3}\right) \qquad \left(\because\ \ a_1=1,\ a_2=-\frac{2}{3}\right)\\ &\iff a_3=-\frac{2}{3}\left(a_3+\frac{1}{3}\right)\\ &\iff 3a_3=-2a_3-\frac{2}{3}\\ &\iff 5a_3=-\frac{2}{3} \qquad \therefore\ \ a_3=-\boldsymbol{\frac{2}{15}}\text{……(答)} \end{aligned}$$

（2） **【証明】**

$0<S_n\leqq 1$ ……① とする．

（ｉ） $n=1$ のとき，

$S_1=a_1=1$ より，① をみたす．

（ii） $n=k$ $(k\geqq 1)$ のとき，① が成り立つと仮定する．すなわち，

$0<S_k\leqq 1$ ……②

ここで，和と一般項の関係および与えられた条件式から，

$$S_{k+1}-S_k=a_{k+1},\quad a_{k+1}=-2S_{k+1}S_k$$

が成り立つので，

$$S_{k+1}-S_k=-2S_{k+1}S_k \cdots\cdots ③$$

これを変形すると，

$$S_{k+1}(1+2S_k)=S_k$$

を得る．② から，$1+2S_k>1$ となるので，

$$S_{k+1}=\frac{S_k}{2S_k+1}>0$$

$$S_{k+1}=\frac{S_k}{2S_k+1}<\frac{S_k}{1}=S_k\leqq 1$$

ゆえに，$0<S_{k+1}\leqq 1$ が成り立つので，$n=k+1$ のときも，① は成り立つ．

以上より，すべての自然数 n に対して ① が成り立つことが示された． 【証明終】

(3) ③ より，

$$S_{n+1}-S_n=-2S_{n+1}S_n$$

であり，$S_n>0$ より，両辺を $S_{n+1}S_n \fallingdotseq 0$ で割ると，

$$\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}=-2 \iff \frac{1}{S_{n+1}}-\frac{1}{S_n}=2$$

よって，数列 $\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$ は，初項 $\dfrac{1}{S_1}=1$，公差 2 の等差数列であるから，

$$\frac{1}{S_n}=1+(n-1)\cdot 2 \iff S_n=\frac{1}{2n-1}$$

これを，$a_n=-2S_nS_{n-1}$ へ，$n\geqq 2$ という条件下で代入すると，

$$a_n=-2\cdot\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2n-3}=\frac{-2}{(2n-1)(2n-3)}$$

この式において，$n=1$ のとき，$a_1=2$ となるので，$n=1$ のときは，みたさないことから，求める a_n は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_1=1} & \boldsymbol{(n=1)} \\ \boldsymbol{a_n=\dfrac{-2}{(2n-1)(2n-3)}} & \boldsymbol{(n\geqq 2)} \end{cases} \cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

与えられた式は，和 S_n と一般項 a_n の式ですから，当然和と一般項の関係を思い出さなければいけません．

(1) は，$S_1=a_1$ であることや $S_2=a_1+a_2$ であることが理解できていれば，完答できる問題です．ここは，確実に得点しましょう．

(2) は，数学的帰納法で証明せよとあるので方針が立てやすくなっていますが，そのヒントが無くても自然数 n に関する不等式を示せと言われたら，数学的帰納法を思い出せるようにしておきましょう．③ 式からの式変形は，少々技巧的にみえるかもしれませんが，示すべきものが何かを考えれば $S_{n+1}=$ の形にすべきであることは必然的にわかります．

(3) は，S_n に関する漸化式を解けばよいのですが，ここは経験しているか否かで難易度に差がでる問題です．両辺を $S_{n+1}S_n \fallingdotseq 0$ で割れば，等差数列型の漸化式に帰着するので，そこに気が付けば容易に a_n は求められます．しかし，最後に $n=1, n\geqq 2$ で a_n の式が違うので，分けて答えなければならない部分を理解しておきましょう．

自然数 x を 9 で割ったときの余りを $R(x)$ で表すことにする.

（1）　$R(2^3)$ および $R(2^6+2^7+2^8)$ を求めよ.

（2）　n を正の整数とするとき，$R(2^n)$ の取り得る値をすべて求めよ.

（3）　n を正の整数とするとき，$R(2^n+2^{2n})$ の取り得る値をすべて求めよ.

自然数 x を 9 で割ったときの余りを $R(x)$ で表すことにする．

（1）　$R(2^3)$ および $R(2^6+2^7+2^8)$ を求めよ．

（2）　n を正の整数とするとき，$R(2^n)$ の取り得る値をすべて求めよ．

（3）　n を正の整数とするとき，$R(2^n+2^{2n})$ の取り得る値をすべて求めよ．

【テーマ】：整数問題

方針

周期性を見抜くことがポイントです．$R(x)$ は x を 9 で割った余りを表すので，$0 \leqq R(x) \leqq 8$ であることにも注意が必要です．

余りについての次の基本事項を知っておきましょう．

（ｉ）　和の余りは，余りの和の余り

（ii）　積の余りは，余りの積の余り

簡単に証明しておきましょう．

【証明】

整数 P, Q を，整数 a で割ったときの商をそれぞれ S, T ，余りをそれぞれ R_1, R_2 とすると，

$$P = aS + R_1,\ Q = aT + R_2$$

と表すことができる．

$$P + Q = a(S+T) + R_1 + R_2$$
$$PQ = a^2ST + (SR_2 + TR_1)a + R_1R_2$$

となるので，$P+Q$ を a で割った余りは，R_1+R_2 になる．
ここで，$a \leqq R_1+R_2$ のときは，さらに R_1+R_2 を a で割ればよいので，和の余りは，余りの和の余りと等しいことがわかる．$a>R_1+R_2$ のときは，R_1+R_2 がそのまま余りとなる．積の場合も同様の議論で示される．
以上より，示された．　　　　**（証明終）**

具体的に，数値を代入してみると，次のようになります．$P=19, Q=13, a=7$ として，計算してみましょう．
$P+Q$ すなわち 32 を 7 で割ると，余りは 4 です．また，PQ すなわち 247 を 7 で割ると，余りは 2 です．

さて，証明した事実を使って計算すると，次のようになります．
P を 7 で割った余りは 5 で，Q を 7 で割った余りは 6 ですから，

$P+Q$ を 7 で割った余りは，$5+6$ を 7 で割った余り 4 に等しく，

PQ を 7 で割った余りは，$5 \cdot 6$ を 7 で割った余り 2 に等しくなります．

これは，先に計算した値と一致していることがわかると思います．

♣　♠

解答

(1)　$R(2^3)=\mathbf{8}$……(答)

$2^6+2^7+2^8$ を 9 で割った余りは，2^6, 2^7, 2^8 をそれぞれ 9 で割った余りの和を 9 で割った余りに等しいので，

$$\begin{aligned} R(2^6+2^7+2^8) &= R(R(2^6)+R(2^7)+R(2^8)) \\ &= R(1+2+4) \\ &= \mathbf{7}\text{……(答)} \end{aligned}$$

(2)　$R(2^{n+1})$ は $2R(2^n)$ を 9 で割った余りと等しい．

$n=1$ のとき　$R(2^1)=2$

$n=2$ のとき　$R(2^2)=4$

$n=3$ のとき　$R(2^3)=8$

$n=4$ のとき　$R(2^4)=7$

$n=5$ のとき　$R(2^5)=5$

$n=6$ のとき　$R(2^6)=1$

よって，$R(2^7)=2R(2^6)=R(2^1)$ となるから，

$$R(2^{n+6})=R(2^n)$$

であることがわかる．よって，$R(2^n)$ のとり得る値は，$\mathbf{1, 2, 4, 5, 7, 8}$……(答)

(3)　$R(2^n+2^{2n})=R(R(2^n)+R(2^{2n}))$

$R(2^{2n})$ は $\{R(2^n)\}^2$ を 9 で割った余りに等しいので，$R(2^n+2^{2n})$ のとり得る値は次の表のようになる．

n	1	2	3	4	5	6
$R(2^n)$	2	4	8	7	5	1
$R(2^{2n})$	4	7	1	4	7	1
$R(2^n+2^{2n})$	6	2	0	2	3	2

よって，$R(2^n+2^{2n})$ のとり得る値は，$\mathbf{0, 2, 3, 6}$……(答)

◇　　　♡

解説

記号の意味を正確に理解しなければいけません．$R(x)$ は合同式でいうと，9 を法とする合同式を考えていることになります．大学入試では，しばしばこのように合同式を別の形に変えて出題されることもあるので，余りに関する基礎知識を知っておかなければなりません．