$a,\ b,\ p$ は $a>0,\ b>0,\ p<0$ を満たす実数とする．座標平面上の 2 曲線

$$C_1 : y = e^x,\quad C_2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

を考える．ただし，e は自然対数の底である．C_1 と C_2 が点 $(p,\ e^p)$ を共有し，その点における C_1 の接線と C_2 の接線が一致するとき，次の問いに答えよ．

(1) p を a を用いて表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}(p+a)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{b^2e^{2a}}{a}$ を求めよ．

a, b, p は $a>0, b>0, p<0$ を満たす実数とする．座標平面上の 2 曲線

$$C_1 : y=e^x,\quad C_2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

を考える．ただし，e は自然対数の底である．C_1 と C_2 が点 (p, e^p) を共有し，その点における C_1 の接線と C_2 の接線が一致するとき，次の問いに答えよ．

(1) p を a を用いて表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}(p+a)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{b^2e^{2a}}{a}$ を求めよ．

【テーマ】：接線と関数の極限

方針

(1) は，C_1, C_2 上の点 (p, e^p) における接線の方程式が一致することから p と a の関係式を求めます．
(2), (3) は，(1) の結果を利用して計算します．

♣ ♠

解答

(1) $y=e^x$ において，$y'=e^x$ であるから，点 (p, e^p) における接線の方程式は，

$$y=e^p(x-p)+e^p \iff y=e^px+(1-p)e^p \cdots\cdots ①$$

一方，C_2 上の点 (p, e^p) における接線の方程式は，

$$\frac{p}{a^2}x+\frac{e^p}{b^2}y=1$$

$e^p \neq 0$ より，

$$y=-\frac{pb^2}{a^2e^p}x+\frac{b^2}{e^p} \cdots\cdots ②$$

①, ② は一致するので，

$$\begin{cases} e^p=-\dfrac{pb^2}{a^2e^p} \\ (1-p)e^p=\dfrac{b^2}{e^p} \end{cases} \iff \begin{cases} a^2e^{2p}=-pb^2 & \cdots\cdots ① \\ (1-p)e^{2p}=b^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

したがって，①, ② より b^2 を消去すると，

$$a^2e^{2p}=-p(1-p)e^{2p} \cdots\cdots ③$$

となり，$e^{2p}\neq 0$ であるから，

$$a^2=-p(1-p) \iff p^2-p-a^2=0$$

である。これを解いて，$p=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a^2}}{2}$ を得る。$a>0,\ p<0$ であるから，

$$\boldsymbol{p=\frac{1-\sqrt{4a^2+1}}{2}}\cdots\cdots(答)$$

（2）（1）の結果より，

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty}(p+a)&=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{4a^2+1}}{2}+a\right)\quad(\because\ ②)\\&=\lim_{a\to\infty}\frac{2a+1-\sqrt{4a^2+1}}{2}\\&=\lim_{a\to\infty}\frac{(2a+1)^2-(4a^2+1)}{2\left(2a+1+\sqrt{4a^2+1}\right)}\\&=\lim_{a\to\infty}\frac{4a}{2\left(2a+1+\sqrt{4a^2+1}\right)}\\&=\lim_{a\to\infty}\frac{4}{2\left(2+\frac{1}{a}+\sqrt{4+\frac{1}{a^2}}\right)}\\&=\frac{4}{2(2+2)}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

（3）（1）より，

$$\begin{aligned}\frac{b^2e^{2a}}{a}&=(1-p)e^{2p}\cdot\frac{e^{2a}}{a}\quad(\because\ ②)\\&=-p(1-p)e^{2p}\cdot\frac{e^{2a}}{-ap}\\&=a^2e^{2p}\cdot\frac{e^{2a}}{-ap}\quad(\because\ ③)\\&=-\frac{ae^{2(p+a)}}{p}\\&=-\frac{2a}{1-\sqrt{4a^2+1}}e^{2(p+a)}\quad(\because\ (1))\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty}\frac{b^2e^{2a}}{a}&=\lim_{a\to\infty}\frac{2a}{\sqrt{4a^2+1}-1}e^{2(p+a)}\\&=\lim_{a\to\infty}\frac{2}{\sqrt{4+\frac{1}{a^2}}-\frac{1}{a}}e^{2(p+a)}\\&=\frac{2}{\sqrt{4}}e^{2\left(\frac{1}{2}\right)}\quad(\because\ (2))\\&=\boldsymbol{e}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

◇ ♡

解説

（1）は共通接線に関する問題で，与えられた点における接線が一致することから傾きと y 切片を比較すれば求めることができます．(2), (3) は，(1) で行った計算結果や計算途中の式（①～③）を利用することで極限の計算を行うことができます．(2) は a のみの式に変形すること，(3) は (2) の結果を使うことができるため，$p+a$ と a の式に変形することがポイントです．つまり，b を消去するための式変形を考えればよいということです．

整数問題【初級編】

整数問題は，高等学校の教科書では学習しません．しかしながら，大学入試では頻出と言ってもよい分野です．では，なぜ高等学校の教科書で扱われないのに，大学入試で出題されるのでしょうか？大学入試で出題される整数問題は，他の分野に比べて公式や定理を利用して解くことがほとんどありません．つまり改めて学習することがほとんどないから高等学校の教科書では扱われていないのでしょう．それならどうして大学入試には出題されるのでしょう？整数問題は，様々なアイデアや技巧的な計算が要求されるため，知識だけではなく発想力などが必要だからでしょう．そのため，整数問題は難問になってしまうことが多々あります．しかし，基本的な問題も当然あるのでそこは必ず得点できるようにしておかなければなりません．ここでは，整数問題の基礎を**【初級編】**で，大学入試では知っておきたい知識や解法を**【中級編】**で解説していくことにします．

よく出題される整数問題は，大きく分けると次のタイプに分類できます．

1. 素因数分解型
2. 因数分解型
3. 絞り込み型
4. 倍数・素数型（証明が主要）
5. 剰余型

【初級編】では，これらを一通り例題を交えながら説明していきます．

1 素因数分解型

素因数分解は中学校で学習することですから，この問題は記号の意味さえ理解できれば，中学生でも解くことができます．

例題 類題演習 ☞ p.11

20! を素因数分解すると，次のようになった．

$$20! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$$

このとき，a, b, c の値を求めよ．ただし，n を自然数とするとき，$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$ とする．

この問題は，1〜20 まで全部書き出してしまえば解くことができます．しかし，それではこの問題を発展させた問題を解くことができなくなってしまいます．汎用性のある解答を考えてみましょう．

♣ ♠

解答 と **解説**

$20! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots\cdots \cdot 19 \cdot 20$ である．まず，素因数 2 の数を数える．●を素因数 2 の個数とすると，

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	●		●		●		●		●		●		●		●		●		●
			●				●				●				●				●
							●								●				
															●				

これより，●の数が a の値と一致するので，$\boldsymbol{a = 18}$……(答)

同様に，▲を素因数 3 の個数とすると，

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
		▲			▲			▲			▲			▲			▲		
								▲									▲		

これより，▲の数が b の値と一致するので，$\boldsymbol{b=8}$……(答)
■を素因数 5 の個数とすると，

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
				■					■					■					■

これより，■の数が c の値と一致するので，$\boldsymbol{c=4}$……(答)

◇ ♡

さて，この方法でどのように一般化すればよいのでしょうか．注目してもらいたいのは，●や▲や■がでてくる規則です．素因数 2 について見てみましょう．1 段目の●は 2 の倍数のところに，2 段目の●は 4 の倍数のところに，3 段目の●は 8 のところに $\cdots$ と考えていくと，n 段目の●は 2^n のところに現れるということになります．これを発見すると，数が少し大きくなっても素因数 2 の個数を見つけることができるのです．

2 因数分解型

例題 類題演習 ☞ p.11

x, y を整数とする．次の方程式をみたす x, y の組をすべて求めよ．

(1) $(x+1)(y-2)=3$

(2) $xy+2x-3y+2=0$

(3) $x^2-3xy+2y^2-6=0$

通常変数が 2 つあれば，式が 2 つなければ x, y の値を特定することはできませんが，その変数が整数であれば，式が 1 つであっても x, y の値を特定することができます．（一意に定まるとは限りません．）このような方程式を**不定方程式**といいます．この不定方程式の解法は，大学入試では必須項目です．

♣ ♠

解答 と **解説**

(1) $x+1$, $y-2$ はともに整数であるから，かけて 3 となる組合せは，次の通りである．

$x+1$	-3	-1	1	3
$y-2$	-1	-3	3	1

上段に -1，下段に 2 を加えると，

x	-4	-2	0	2
y	1	-1	5	3

ゆえに，求める整数解は，

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(-4,\ 1),\ (-2,\ -1),\ (0,\ 5),\ (2,\ 3)}\text{……(答)}$$

(2)　$xy+2x-3y+2=0 \iff (x-3)(y+2)=-8$ ☞ 解説

$x-3,\ y+2$ はともに整数であるから，かけて -8 となる組合せは，次の通りである.

$x-3$	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
$y+2$	1	2	4	8	-8	-4	-2	-1

上段に 3，下段に -2 を加えると，

x	-5	-1	1	2	4	5	7	11
y	-1	0	2	6	-10	-6	-4	-3

ゆえに，求める整数解は，

$$(x,\ y)=(-5,\ -1),\ (-1,\ 0),\ (1,\ 2),\ (2,\ 6),\ (4,\ -10),\ (5,\ -6),\ (7,\ -4),\ (11,\ -3)\cdots\cdots(答)$$

解説

不定方程式を解くときの最も基本的な方法は，式の形を

(整数)×(整数)＝(整数)

とすることです.(1) ではこのような形になっていたのですが，(2) ではなっていません．まずは，この形に変形する必要があります.

$x,\ y$ の 2 変数がともに 1 次式で与えられているような場合は，次の手順で変形していきます.

（ｉ） xy という項に注目して，$(x-○)(y-△)=□$ とします.

（ii） x の係数に注目して，△の値を決定します.$(x-○)(y+2)=□$

（iii） y の係数に注目して，○の値を決定します.$(x-3)(y+2)=□$

（iv） 最後に定数項に注目して，□の値を決定します.$(x-3)(y+2)=-8$

慣れてしまえば難しくありませんから，まずはこの変形が確実にできるようにしましょう.

(3)　$x^2-3xy+2y^2-6=0 \iff (x-2y)(x-y)=6$

$x-2y,\ x-y$ はともに整数であるから，かけて 6 となる組合せは，次の通りである.

$x-2y$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
$x-y$	-1	-2	-3	-6	6	3	2	1

上段に -1 をかけて，下段に加えると，

$x-2y$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
y	5	1	-1	-5	5	1	-1	-5

下段に 2 をかけて，上段に加えると，

x	4	-1	-4	-11	11	4	1	-4
y	5	1	-1	-5	5	1	-1	-5

ゆえに，求める整数解は，

$$(x,\ y)=(4,\ 5),\ (-1,\ 1),\ (-4,\ -1),\ (-11,\ -5),\ (11,\ 5),\ (4,\ 1),\ (1,\ -1),\ (-4,\ -5)\cdots\cdots(答)$$

解説

このタイプも因数分解を行いますが，$x^2,\ xy,\ y^2$ があるので，この部分だけに着目して因数分解します．したがって，いつも因数分解ができるとは限りません.（因数分解できないタイプは少々難しいので，初級編では割愛します.）

3 絞り込み型

与えられた式から，整数値を絞り込んで，あとはしらみつぶしに探す方法が最も基本的な解法になります．

例題 類題演習 ☞ p.11

次の各問いに答えよ．

(1) $\dfrac{n^2+17n-29}{n-5}$ の値が自然数となるような整数 n の値をすべて求めよ．

(2) $x+y+z^2=13$ をみたす自然数 $x,\ y,\ z$ の組は全部で何通りあるか．

(3) $x,\ y$ を $x \leqq y$ をみたす自然数とする．$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5}$ をみたす $x,\ y$ の組をすべて求めよ．

絞り込みの方法は，与えられた条件が少ない上に様々な解法があるので，式変形のテクニックや方法が重要なポイントになります．経験していないと難しいのが特徴です．

解答 と **解説**

(1) $n^2+17n-29=(n-5)(n+22)+81$ と表されるので，

$$\frac{n^2+17n-29}{n-5}=\frac{(n-5)(n+22)-81}{n-5}=n+22+\frac{81}{n-5}$$

よって，$n-5$ が 81 の約数であればよい．

$n-5=1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81$ のときは，$n=6,\ 8,\ 14,\ 32,\ 86$ となり，題意をみたす．

(i) $n-5=-1$ のとき，$n=4$ でこのとき，

(与式)$=26-81<0$ となり，題意に反するので不適．

(ii) $n-5=-3$ のとき，$n=2$ でこのとき，

(与式)$=24-27<0$ となり，題意に反するので不適．

(iii) $n-5=-9$ のとき，$n=-4$ でこのとき，

(与式)$=18-9>0$ となり，題意をみたす．

(iv) $n-5=-27,\ -81$ のときは，明らかに (与式)<0 となり，題意に反するので不適．

ゆえに，求める n の値は，

$$\boldsymbol{n=-4,\ 6,\ 8,\ 14,\ 32,\ 86}\cdots\cdots(\text{答})$$

解説

整式の除法を用いて，$n^2+17n-29=(n-5)(n+22)+81$ とし，さらに与式を

$$n+22+\frac{81}{n-5}$$

の形に変形するのが一番のポイントです．こうすることで，$n+22$ は整数なので $\dfrac{81}{n-5}$ だけを考えることができ，しかも分子が定数になっているので，これが整数になる条件は絞られるのです．あとは，条件をみたすように n を一つ一つ調べていけばよいのですが，与えられた式が**自然数**になるということを忘れないように調べましょう．整数問題は，与えられた条件をみたす**整数**を求めるのか，**自然数**（**正の整数**)を求めるのかを明確にしておかなければいけません．

(2)　$z^2 = 13 - (x + y) \leqq 13 - 2 = 11$ であるから，z のとり得る値は，$z = 1,\ 2,\ 3$ である．

(ｉ)　$z = 1$ のとき，

$x + y = 12$ より，$(x,\ y) = (1,\ 11),\ (2,\ 10),\ \cdots,\ (11,\ 1)$ の 11 組

(ii)　$z = 2$ のとき，

$x + y = 9$ より，$(x,\ y) = (1,\ 8),\ (2,\ 7),\ \cdots,\ (8,\ 1)$ の 8 組

(iii)　$z = 3$ のとき，

$x + y = 4$ より，$(x,\ y) = (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$ の 3 組

ゆえに，求める組数は，

$$11 + 8 + 3 = \mathbf{22}\textbf{(通り)}\cdots\cdots\text{(答)}$$

解説

z の値を絞らないと大変な場合分けをしなくてはならなくなります．解答をみると簡単に思えるかもしれませんが，初めて挑むと何から手をつけてよいかわからないのが現状でしょう．このような問題では，

$$z^2 > 0,\ x \geqq 1,\ y \geqq 1$$

という隠れた条件を利用しています．このように，整数問題では，隠れた条件式を見つけ出して利用することが多々あります．特に，絞り込みの場合は $z^2 > 0$ のような条件は頻繁に使います．

(3)　$x \leqq y$ より，$\dfrac{1}{x} \geqq \dfrac{1}{y}$ であるから，

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geqq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \iff \frac{2}{x} \geqq \frac{1}{5} \iff x \leqq 10$$

また，$\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{x} > 0$ であるから，$x > 5$ である．したがって，$6 \leqq x \leqq 10$ である．

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{5} - \frac{1}{x} = \frac{x-5}{5x} \iff y = \frac{5x}{x-5} \ \cdots\cdots ①$$

よって，$x = 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$ の値に対して，① から y の値を求めると，次のようになる．

x	6	7	8	9	10
y	30	$\dfrac{35}{2}$	$\dfrac{40}{3}$	$\dfrac{45}{4}$	10

$x,\ y$ は自然数であるから，$\boldsymbol{(x,\ y) = (6,\ 30),\ (10,\ 10)}$……(答)

解説

$x \leqq y$ という条件から，不等式を作って絞り込みを行います．その際，$x \leqq 10$ と出てくるので，$x = 1,\ 2,\ \cdots,\ 10$ を調べることになりますが，y が自然数であるという条件から，$x > 5$ となるので，$x = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ は調べる必要がなくなります．このように，調べる場合が多いときは，上から絞り込むだけでなく下から絞り込む方法も有効です．これは，ある程度経験を積まないと難しいと思うので，たくさんの演習を通して身に付けてください．
ちなみに，両辺に $5xy$ をかけると不定方程式になるので，因数分解を利用する方法でも解くことができます．

4 倍数・素数型

整数 n に対して，ある整式がある数の倍数になることを証明する問題が多く，経験したことがある人が多いと思います．

例題 類題演習 ☞ p.11

n を自然数とする．次の各問いに答えよ．

(1) $2n^3-3n^2+n$ が 6 の倍数であることを示せ．

(2) n^5-n は 30 の倍数であることを示せ．

(3) 2^n-1 が素数ならば n も素数であることを対偶を用いて示せ．

ある整数が 2, 3, 4, …, の倍数であることを見分ける方法を知っていなければ話になりません．有名なのは 3 の倍数・9 の倍数の判定法ですが，それ以外にも一通りあげておきましょう．

【倍数の判定法】

2, 5, 10 に関してはすぐにわかると思いますので，3, 4, 6, 8, 9, 12 は必ず覚えておきましょう．

2 の倍数 …… 偶数
3 の倍数 …… 各位の和が 3 の倍数
4 の倍数 …… 下 2 桁が 4 の倍数
5 の倍数 …… 下 1 桁が 0 か 5
6 の倍数 …… 2 かつ 3 の倍数
8 の倍数 …… 下 3 桁が 8 の倍数
9 の倍数 …… 各位の和が 9 の倍数
10 の倍数 …… 下 1 桁が 0
12 の倍数 …… 3 かつ 4 の倍数

また，いくつかの整数の積がある数の倍数であるという判定方法もあります．

【隣接 k 整数の積】

隣接する k 個の整数の積は，$k!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots\cdot k$ の倍数である．

では，これらの基本事項を用いて **例題** を解いてみましょう．

♣ ♠

解答 と **解説**

(1) **【証明】**

$2n^3-3n^2+n=n(2n-1)(n-1)$ であるから，与えられた数は隣接する 2 つの整数の積を含んでいるので，2 の倍数である．よって，3 の倍数であることを示せばよい．k を自然数とする．

(i) $n=3k$ のとき，

$$n(2n-1)(n-1)=3k(6k-1)(3k-1)$$

となるので，3 の倍数である．

(ii) $n=3k-1$ のとき，

$$n(2n-1)(n-1)=(3k-1)(6k-3)(3k-2)=3(3k-1)(2k-1)(3k-2)$$

となるので，3 の倍数である．

(iii) $n=3k-2$ のとき，

$$n(2n-1)(n-1)=(3k-2)(6k-5)(3k-3)=3(3k-2)(6k-5)(k-1)$$

となるので，3 の倍数である．

ゆえに，$2n^3-3n^2+n$ は 2 かつ 3 の倍数であるから，6 の倍数であることが示された． **(証明終)**……**(答)**

解説

$n(n-1)$ という形から隣接する 2 つの整数の積であることを見抜かなければいけません．$n(n+1)$ という形でよく出てきますが，その他の形でも隣接する 2 つあるいは 3 つの整数の積であることを見つけられるようにしておきましょう．
また，3 の倍数であることを示す方法は，様々ですが本問のように式からすぐに示せない場合は，場合分けをしなければいけません．これも最頻出の証明方法なので必ずできるようになっておきましょう．さらに，注意したいのは，n が自然数なので，k を整数にしてはいけないことと，$n=3k,\ 3k+1,\ 3k+2$ と場合分けしてはいけないことです．k を自然数としたとき，この場合分けでは，$n=1,\ 2$ が網羅されていません．したがって，解答 のように n を分けなければならないのです．

（2）**【証明】**

$$
\begin{aligned}
n^5-n &= n(n^4-1)\\
&= n(n^2-1)(n^2+1)\\
&= n(n-1)(n+1)(n^2-4+5)\\
&= n(n-1)(n+1)(n^2-4)+5n(n-1)(n+1)\\
&= n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)+5n(n-1)(n+1)
\end{aligned}
$$

となる．$n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$ は隣接する 5 つの整数の積であるから，$5!=120$ の倍数であり，$5n(n-1)(n+1)$ は $n(n-1)(n+1)$ が隣接する 3 つの整数の積であることから $5\times 3!=30$ の倍数である．
よって，n^5-n は 30 の倍数であることが示された．　　(証明終)……(答)

解説

式変形が難しく一度経験していなければなかなか思いつかないかもしれません．しかし，この式変形が思いつかなくても 30 の倍数であることを示すには，2 かつ 3 かつ 5 の倍数であることを示せばよいということには気付かなければいけません．$n^5-n=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ まで因数分解できれば，隣接する 3 つの整数の積を含んでいるので，$3!=6$ の倍数であることがわかりますから，あとは 5 の倍数であることを示せばよいだけです．
5 の倍数であることを示すためには，(1) のような場合分けを行って証明すればよいのです．

（3）**【証明】**

$n=1$ のとき，$2-1=1$ となるので，$n\geqq 2$ で考える．
「2^n-1 が素数ならば n も素数である」の対偶は，「n が合成数ならば 2^n-1 も合成数である」である．n を合成数とし，$n=pq$（$p,\ q$ はともに 1 より大きい整数）とすると，

$$
\begin{aligned}
2^n-1 &= 2^{pq}-1\\
&= (2^q)^p-1\\
&= (2^q-1)\{(2^q)^{p-1}+(2^q)^{p-2}+\cdots\cdots+1\}
\end{aligned}
$$

となる．$q>1$ より，$2^q-1>1,\ (2^q)^{p-1}+(2^q)^{p-2}+\cdots\cdots+1>1$ となるので，2^n-1 は合成数である．
したがって，2^n-1 が素数ならば n も素数であることが示された．　　(証明終)……(答)

解説

この問題を解くにあたって，必要な予備知識が 2 つあります．1 つめは，自然数の分類です．自然数を分類する方法は色々あります．例を挙げると，

$$
\left\{\begin{array}{l}\text{奇数}\\ \text{偶数}\end{array}\right.
\qquad
\left\{\begin{array}{l}1\\ \text{素数}\\ \text{合成数}\end{array}\right.
\qquad
\left\{\begin{array}{l}3\text{ で割り切れる数}\\ 3\text{ で割ると }1\text{ 余る数}\\ 3\text{ で割ると }2\text{ 余る数}\end{array}\right.
$$

等です．ここで,**合成数**という言葉を始めて聞く人もいるかもしれませんが，合成数はいくつかの素数の積で表される数のことです．したがって，自然数は 1 と素数と合成数から成り立っています．この分類方法を知らなければ，解答は困難です．
2 つめは，次の因数分解の公式です．

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots\cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$
$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots\cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (n：\text{奇数})$$

$a^n + b^n$ は n が偶数のとき，必ず因数分解できるとは限りません．

5 剰余型

余りに関する問題も頻出事項です．しかしながら，余りに関する基本的な知識を身につけていれば，対処できる場合が多く，対策できているかどうかが重要になる問題が多くあります．

例題 類題演習 ☞ p.11

次の各問いに答えよ．

(1) 3^{15} を 10 で割った余りを求めよ．

(2) 100^{100} を 7 で割った余りを求めよ．

(3) n を自然数とするとき，$9^{2n} + 4^{2n}$ を 5 で割った余りは 2 であることを示せ．

余りを求める問題は，非常に重要です．余りの仕組みが理解できれば，それほど難しいものではありません．まずは，予備知識なしで解ける方法を解説します．

♣ ♠

解答 と **解説**

(1) 3^{15} を 10 で割った余りを求めるということは，3^{15} の 1 の位の数を求めることと同値である．ここで，$f(n)$ が整数 n の 1 の位を表すものとすると，

$$f(3) = 3,\ f(3^2) = 9,\ f(3^3) = 7,\ f(3^4) = 1,\ f(3^5) = 3,\ \cdots$$

となるので，k を自然数とするとき，

$$f(3^{4k-3}) = 3,\ f(3^{4k-2}) = 9,\ f(3^{4k-1}) = 7,\ f(3^{4k}) = 1$$

である．$15 = 4 \cdot 4 - 1$ であるから，$f(3^{15}) = 7$ となる．ゆえに，3^{15} を 10 で割った余りは，**7**……(答)

解説

1 の位が求めたければ，1 の位だけに着目すれば十分である．したがって，他の位を考えることがないので，このような解法をとることができる．しかし，書き方が難しいので，解答をかくには練習が必要でしょう．
この問題は,**【中級編】**で解説する**合同式**を用いるとあっさり解くことができます．

(2) a, b, n を自然数とするとき，

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n \\ &= a({}_n\mathrm{C}_0 a^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-2}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-3}b^2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} b^{n-1}) + {}_n\mathrm{C}_n b^n \quad \cdots\cdots①\end{aligned}$$

であるから，$a = 98,\ b = 2,\ n = 100$ とすると，

$$(98+2)^{100} = 98({}_{100}\mathrm{C}_0 98^{99} + {}_{100}\mathrm{C}_1 98^{98} 2 + {}_{100}\mathrm{C}_2 98^{97} 2^2 + \cdots\cdots + {}_{100}\mathrm{C}_{99} 2^{99}) + {}_{100}\mathrm{C}_{100} 2^{100}$$

であるから，100^{100} を 7 で割った余りは，2^{100} を 7 で割ったあまりと等しい．

$$2^{100}=2\cdot 2^{99}=2\cdot 8^{33}=2\cdot(7+1)^{33}$$

と変形すると，同様に考えれば，2^{100} を 7 で割った余りは，$2\cdot 1^{33}$ を 7 で割った余りに等しい．$2\cdot 1^{33}=2$ であることから，100^{100} を 7 で割った余りは，**2**……(答)

解説

100^{100} を実際に 7 で割るわけにはいかないので，二項定理を駆使して解いています．これは，7 の倍数部分は当然 7 で割り切れるので，余った部分を 7 で割るという考え方を用いています．例えば，1000 を 7 で割った余りを考えるとします．

$$1000=7\times 100+300$$

と変形できるので，1000 を 7 で割った余りは 300 を 7 で割った余りに等しくなります．さらに，

$$300=7\times 42+6$$

と変形できるので，300 を 7 で割った余りは 6 を 7 で割った余りに等しくなります．すなわち，求める余りは 6 ということになります．すなわち，

$$1000=7\times 100+300=7\times 100+7\times 42+6=7\times(100+42)+6$$

という変形を行っていることになります．
本問の解答もこれと同じ原理を利用しているのです．

(3) 【証明】

$9^{2n}+4^{2n}=81^n+16^n$ である．ここで，① より，$a=80,\ b=1$ とすると，

$$(80+1)^n=80({}_n\mathrm{C}_0 80^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_1 80^{n-2}\cdot 1+{}_n\mathrm{C}_2 80^{n-3}\cdot 1^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}1^{n-1})+{}_n\mathrm{C}_n 1^n$$

と表されるので，81^n を 5 で割った余りは，1 である．同様に，① より，$a=15,\ b=1$ とすると，

$$(15+1)^n=15({}_n\mathrm{C}_0 15^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_1 15^{n-2}\cdot 1+{}_n\mathrm{C}_2 15^{n-3}\cdot 1^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}1^{n-1})+{}_n\mathrm{C}_n 1^n$$

と表されるので，16^n を 5 で割った余りは，1 である．
以上より，$9^{2n}+4^{2n}$ を 5 で割った余りは，2 であることが示された．　(証明終)……(答)

解説

余りに関して次のようなことが成り立ちます．これは，非常に重要なことなので，確実に理解してください．

自然数 $x,\ y,\ a$ がある．x を a で割った余りを $R(x)$, y を a で割った余りを $R(y)$ とする．このとき，次の式が成り立つ．

$$\begin{cases} R(x+y)=R(x)+R(y) \\ R(xy)=R(x)R(y) \end{cases}$$

この式を直訳すると，

$$\begin{cases} \text{和を } a \text{ で割った余りは，} a \text{ で割った余りの和に等しい．} \\ \text{積を } a \text{ で割った余りは，} a \text{ で割った余りの積に等しい．} \end{cases}$$

となります．式を使って説明すると次のようになります．
x を a で割った商を P 余りを $R(x)$ ，y を a で割った商を Q 余りを $R(y)$ とすると，

$$\begin{cases} x=aP+R(x) \\ y=aQ+R(y) \end{cases}$$

となる．よって，

$$x+y=a(P+Q)+R(x)+R(y)$$

となることから，$x+y$ を a で割った余りは，$R(x)+R(y)$ となる．また，

$$\begin{aligned} xy=(aP+R(x))(aQ+R(y)) &= a^2PQ+a(PR(y)+QR(x))+R(x)R(y) \\ &= a\{aPQ+(PR(y)+QR(x))\}+R(x)R(y) \end{aligned}$$

となることから，xy を a で割った余りは，$R(x)R(y)$ となります．具体的な数字を用いて説明すると，
$x=24,\ y=65,\ a=7$ として考えてみます．まず，和は

$$x+y=24+65=89$$

ですね．89 を 7 で割った余りは，5 となります．24 を 7 で割った余りは 3 で，65 を 7 で割った余りは 2 ですから，89 を 7 で割った余りは $3+2=5$ となり，確かに $R(x+y)=R(x)+R(y)$ が成り立っています．
また，積は

$$xy=24\cdot 65=1560$$

ですね．1560 を 7 で割った余りは，6 となります．24 を 7 で割った余りは 3 で，65 を 7 で割った余りは 2 ですから，1560 を 7 で割った余りは $3\times 2=6$ となりとなり，確かに $R(xy)=R(x)R(y)$ が成り立っています．
このように，和や積の余りを考えるときには，このことは非常に有効に使えるのです．本問はこのことを用いて証明をしています．

◀類題演習▶

1

解答 ☞ p.12

2008! を素因数分解したとき，素因数 2 はいくつあるか．

2

解答 ☞ p.13

x, y を整数とする．次の方程式をみたす x, y の組をすべて求めよ．

（1） $3xy+2x+y=0$

（2） $x^2-xy-2y^2=16$

3

解答 ☞ p.14

次の各問いに答えよ．

（1） $\dfrac{n^2-7n+30}{n-4}$ の値が自然数となるような整数 n の値をすべて求めよ．

（2） $x^2+y^2+z=31$ をみたす自然数 x, y, z の組は全部で何通りあるか．

（3） x, y は 3 以上の自然数とする．$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \geqq \dfrac{1}{2}$, $y \geqq x$ をみたす x, y の組をすべて求めよ．

4

解答 ☞ p.15

n を自然数とする．次の各問いに答えよ．

（1） $n^4+4n^3-n^2-4n$ が 12 の倍数であることを示せ．

（2） a, n を 2 以上の整数とする．a^n-1 が素数ならば n も素数であることを対偶を用いて示せ．

5

解答 ☞ p.16

次の各問いに答えよ．

（1） 7^{100} を 10 で割った余りを求めよ．

（2） 3^{100} を 7 で割った余りを求めよ．

（3） n を自然数とするとき，4^n+6^n を 5 で割った余りを求めよ．

1 解答 と 解説

素因数 2 の個数を●で表すと，

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	…
	●		●		●		●		●		●		●		●		●		●	
			●				●				●				●				●	
							●								●					
															●					

となることから，●の個数が素因数 2 の個数と一致する．

2 の倍数は，	1004 個	2^2 の倍数は，	502 個
2^3 の倍数は，	251 個	2^4 の倍数は，	125 個
2^5 の倍数は，	62 個	2^6 の倍数は，	31 個
2^7 の倍数は，	15 個	2^8 の倍数は，	7 個
2^9 の倍数は，	3 個	2^{10} の倍数は，	1 個

であるから，求める素因数 2 の個数は，

$$1004+502+251+125+62+31+15+7+3+1=\mathbf{2001}\textbf{(個)}\cdots\cdots\text{(答)}$$

♣ ♢ ♠ ♡

解説

やり方が分かってしまえば，いくらでも応用できそうですね！一般の場合に拡張して考えてみるのもいいかもしれません．ちなみに素因数 3, 5 の個数はそれぞれ 1000, 500 となりますので，もし間違えた人は類題演習という意味でこれらも求めてみるとよいでしょう．

ちなみに，解答 にある式をもっと簡単に表すと，次のようになります．

$$\left[\frac{2008}{2}\right]+\left[\frac{2008}{2^2}\right]+\left[\frac{2008}{2^3}\right]+\cdots\cdots+\left[\frac{2008}{2^{10}}\right]=2001$$

ここで，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表します．（ガウス記号とも言う．）このガウス記号は，整数問題では頻繁に登場します．これに関する問題は中級編で扱います．

2 解答 と 解説

(1)

$$\begin{aligned} 3xy+2x+y=0 &\iff xy+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=0 \\ &\iff \left(x+\frac{1}{3}\right)\left(y+\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9} \\ &\iff (3x+1)(3y+2)=2 \end{aligned}$$

$3x+1,\ 3y+2$ はともに整数であるから，かけて 2 となる組合せは，次の通りである．

$3x+1$	-2	-1	1	2
$3y+2$	-1	-2	2	1

上段に -1，下段に -2 を加えると，

$3x$	-3	-2	0	1
$3y$	-3	-4	0	-1

上段，下段ともに 3 で割ると，

x	-1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
y	-1	$-\frac{4}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$

ゆえに，求める整数解は，

$$\boldsymbol{(x,y)=(-1,-1),\ (0,0)}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$x^2-xy-2y^2=16 \iff (x-2y)(x+y)=16$

$x-2y,\ x+y$ はともに整数であるから，かけて 16 となる組合せは，次の通りである．

$x-2y$	-16	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8	16
$x+y$	-1	-2	-4	-8	-16	16	8	4	2	1

上段に -1 をかけて，下段に加えると，

$x-2y$	-16	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8	16
$3y$	15	6	0	-6	-15	15	6	0	-6	-15

下段に $\frac{2}{3}$ をかけて，上段に加えると，

x	-6	-4	-4	-6	-11	11	6	4	4	6
y	5	2	0	-2	-5	5	2	0	-2	-5

ゆえに，求める整数解は，

$$\boldsymbol{(x,y)=(-6,5),\ (-4,2),\ (-4,0),\ (-6,-2),\ (-11,-5)}$$
$$\boldsymbol{(11,5),\ (6,2),\ (4,0),\ (4,-2),\ (6,-5)}\cdots\cdots(\text{答})$$

——— ♣ ——— ♢ ——— ♠ ——— ♡ ———

解説

(1) は $3xy+2x+y=0$ の形ではうまく因数分解することができません．例題にあるような方法で因数分解を行うために両辺をまず 3 で割るのです．そうすれば，例題の方法で因数分解を行うことができます．後は，両辺を 9 倍して，(整数)×(整数)＝(整数) の形に変形してやればよいのです．

3 解答 と 解説

(1)　$n^2-7n+30=(n-4)(n-3)+18$ と表されるので，

$$\frac{n^2-7n+30}{n-4}=\frac{(n-4)(n-3)+18}{n-4}=n-3+\frac{18}{n-4}$$

よって，$n-4$ が 18 の約数であればよい．

$n-4=1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18$ のときは，$n=5,\ 6,\ 7,\ 10,\ 13,\ 22$ となり，題意をみたす．

$n-4\leqq -1$ のとき，$n\leqq 3$ でこのとき，

$(\text{与式})=n-3+\dfrac{18}{n-4}<0$ となり，題意に反するので不適．

ゆえに，求める n の値は，

$$\boldsymbol{n=5,\ 6,\ 7,\ 10,\ 13,\ 22}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$x^2=31-(y^2+z)\leqq 31-2=29$ であるから，x のとり得る値は，$x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ である．

（i）$x=1$ のとき，

$y^2+z=30$ より，$(y,\ z)=(1,\ 29),\ (2,\ 26),\ (3,\ 21),\ (4,\ 14),\ (5,\ 5)$ の 5 組

（ii）$x=2$ のとき，

$y^2+z=27$ より，$(y,\ z)=(1,\ 26),\ (2,\ 23),\ (3,\ 18),\ (4,\ 11),\ (5,\ 2)$ の 5 組

（iii）$x=3$ のとき，

$y^2+z=22$ より，$(y,\ z)=(1,\ 21),\ (2,\ 18),\ (3,\ 13),\ (4,\ 6)$ の 4 組

（iv）$x=4$ のとき，

$y^2+z=15$ より，$(y,\ z)=(1,\ 14),\ (2,\ 11),\ (3,\ 6)$ の 3 組

（v）$x=5$ のとき，

$y^2+z=6$ より，$(y,\ z)=(1,\ 5),\ (2,\ 2)$ の 2 組

ゆえに，求める組数は，

$$5+5+4+3+2=\mathbf{19}(\textbf{通り})\cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　$x\leqq y$ より，$\dfrac{1}{x}\geqq\dfrac{1}{y}$ であるから，

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\geqq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqq\frac{1}{2}\iff\frac{2}{x}\geqq\frac{1}{2}\iff x\leqq 4$$

したがって，$x=3,\ 4$ である．

（i）$x=3$ のとき，

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{y}\geqq\frac{1}{2}\iff y\leqq 6$$

したがって，$y=3,\ 4,\ 5,\ 6$ である．

（ii）$x=4$ のとき，

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{y}\geqq\frac{1}{2}\iff y\leqq 4$$

したがって，$y=4$ である．

ゆえに，$\boldsymbol{(x,\ y)=(3,\ 3),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (3,\ 6),\ (4,\ 4)}\cdots\cdots(\text{答})$

♣　◇　♠　♡

解説

(1) では $n-4\leqq -1$ のときは，すべて題意をみたさないことを見抜き一気に不適であることを示すほうが効率がよいでしょう．(2) は $x,\ y$ どちらかの値を絞ってあとはしらみつぶしに探していきます．z の値を絞ると $z\leqq 29$ となるため効率的とはいえません．(3) は定石通り値の小さいほうの文字 x で絞り込みます．

4 解答 と 解説

(1) 【証明】

$n^4+4n^3-n^2-4n=(n-1)n(n+1)(n+4)$ であるから，与えられた数は隣接する 3 つの整数の積を含んでいるので，3 の倍数である．よって，4 の倍数であることを示せばよい．k を自然数とする．

(ｉ) $n=2k$ のとき，

$$(n-1)n(n+1)(n+4)=(2k-1)\cdot 2k\cdot(2k+1)(2k+4)=4(2k-1)k(2k+1)(k+2)$$

となるので，4 の倍数である．

(ii) $n=2k-1$ のとき，

$$(n-1)n(n+1)(n+4)=(2k-2)(2k-1)\cdot 2k\cdot(2k+3)=4(k-1)(2k-1)k(2k+3)$$

となるので，4 の倍数である．

ゆえに，$n^4+4n^3-n^2-4n$ は 3 かつ 4 の倍数であるから，12 の倍数であることが示された．

(証明終)……(答)

(2) 【証明】

「a^n-1 が素数ならば n も素数である」の対偶は，「n が合成数ならば a^n-1 も合成数である」である．n を合成数とし，$n=pq$ (p, q はともに 1 より大きい整数) とすると，

$$\begin{aligned} a^n-1 &= a^{pq}-1 \\ &= (a^q)^p-1 \\ &= (a^q-1)\{(a^q)^{p-1}+(a^q)^{p-2}+\cdots\cdots+1\} \end{aligned}$$

となる．$q>1$ より，$a^q-1>1$, $(a^q)^{p-1}+(a^q)^{p-2}+\cdots\cdots+1>1$ となるので，a^n-1 は合成数である．

したがって，a^n-1 が素数ならば n も素数であることが示された．　(証明終)……(答)

―――― ♣ ―――― ♢ ―――― ♠ ―――― ♡ ――――

解説

(1) では因数分解すれば，隣接する 3 つの整数の積が出てくるので，$3!=6$ の倍数であることがわかります．ここで，$(n-1)n(n+1)$ が 6 の倍数だから与えられた式が 12 の倍数になるためには $(n+4)$ が 2 の倍数になればよいと考えるのは誤りです．なぜなら，$(n+4)$ が 2 の倍数にならなくても $(n-1)n(n+1)$ が 12 の倍数になることがあるからです．($(n-1)n(n+1)$ は 6 の倍数なので 12 の倍数になることがある．) したがって，別に 4 の倍数であることを示さなければいけません．(2) は，p.6 の例題を一般化したものなので，まったく同じ解法で解くことができます．

5 解答 と 解説

(1)　7^{100} を 10 で割った余りを求めるということは，7^{100} の 1 の位の数を求めることと同値である．ここで，$f(n)$ が整数 n の 1 の位を表すものとすると，

$$f(7)=7,\ f(7^2)=9,\ f(7^3)=3,\ f(7^4)=1,\ f(7^5)=7,\ \cdots$$

となるので，k を自然数とするとき，

$$f(7^{4k-3})=7,\ f(7^{4k-2})=9,\ f(7^{4k-1})=3,\ f(7^{4k})=1$$

である．$100=4\cdot 25$ であるから，$f(7^{100})=1$ となる．ゆえに，7^{100} を 10 で割った余りは，**1**……(答)

(2)　$3^{100}=9^{50}$ である．ここで，a,b,n を自然数とするとき，

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= {}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_nb^n\\ &= a({}_n\mathrm{C}_0a^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-2}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}b^{n-1})+{}_n\mathrm{C}_nb^n\ \cdots\cdots①\end{aligned}$$

であるから，$a=7,\ b=2,\ n=50$ とすると，

$$(7+2)^{50}=7({}_{50}\mathrm{C}_07^{49}+{}_{50}\mathrm{C}_17^{48}2+{}_{50}\mathrm{C}_27^{47}2^2+\cdots\cdots+{}_{50}\mathrm{C}_{49}2^{49})+{}_{50}\mathrm{C}_{50}2^{50}$$

であるから，3^{100} を 7 で割った余りは，2^{50} を 7 で割ったあまりと等しい．

$$2^{50}=2^2\cdot 2^{48}=4\cdot 8^{16}=4\cdot(7+1)^{16}$$

と変形すると，同様に考えれば，2^{50} を 7 で割った余りは，$4\cdot 1^{16}$ を 7 で割った余りに等しい．$4\cdot 1^{16}=4$ であることから，3^{100} を 7 で割った余りは，**4**……(答)

(3)　**【証明】**

① より，$a=5,\ b=-1$ とすると，

$$4^n=(5-1)^n=5({}_n\mathrm{C}_05^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_15^{n-2}(-1)+{}_n\mathrm{C}_25^{n-3}(-1)^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}(-1)^{n-1})+{}_n\mathrm{C}_n(-1)^n$$

と表されるので，4^n を 5 で割った余りは，$(-1)^n$ である．同様に，① より，$a=5,\ b=1$ とすると，

$$6^n=(5+1)^n=5({}_n\mathrm{C}_05^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_15^{n-2}\cdot 1+{}_n\mathrm{C}_25^{n-3}\cdot 1^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}1^{n-1})+{}_n\mathrm{C}_n1^n$$

と表されるので，6^n を 5 で割った余りは，1 である．
よって，4^n+6^n を 5 で割った余りは，$(-1)^n+1$ となるので，n が偶数のとき，余りは 2 であり，n が奇数のとき，余りは 0 である．
以上より，4^n+6^n を 5 で割った余りは，

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\ \textbf{が偶数のとき，}\ \mathbf{2}\\ \boldsymbol{n}\ \textbf{が奇数のとき，}\ \mathbf{0}\end{cases}\cdots\cdots(\text{答})$$

♣ ♢ ♠ ♡

解説

(1), (2) は例題と同様の解法で解くことができます．(3) では余りが $(-1)^n+1$ となるので，n を偶数のときと奇数のときとに場合分けして答えておきましょう．
中級編では，合同式を用いてもっと楽に解いてみます．

整数問題【中級編】

初級編をマスターした人は，中級編にトライしていきましょう．ここでは，合同式の知識を学習し，より快適に整数問題を攻略する術を身につけていきます．なお，合同式は大学の教養課程で学習するものですが，大学入試で取り上げられることもあり，整数問題を頻出とする大学を受験する人は是非とも知っておきたい方法です．

【合同式】

整数 a をある数 n で割ったとき，その余りによって n 通りに分類することができます．

例： 整数 を 5 で割ったときの余りについて分類すると，

余り 0 ☞ $\cdots\ -10,\ -5,\ 0,\ 5,\ 10\ \cdots$

余り 1 ☞ $\cdots\ -9,\ -4,\ 1,\ 6,\ 11\ \cdots$

余り 2 ☞ $\cdots\ -8,\ -3,\ 2,\ 7,\ 12\ \cdots$

余り 3 ☞ $\cdots\ -7,\ -2,\ 3,\ 8,\ 13\ \cdots$

余り 4 ☞ $\cdots\ -6,\ -1,\ 4,\ 9,\ 14\ \cdots$

となります．負の数の余りは少し違和感があるかもしれませんが $\cdots$．このように，無限個の整数を有限個に分類することは非常に大切な考え方なのです．そこで，余りに着目して等式を考えてみることにしましょう．

a, b を整数，n を自然数とするとき，a を n で割った余りと b を n で割った余りが等しいならば，「a と b は n を法として**合同**である」といい，次のように表します．

$$a \equiv b \pmod{n}$$

このような式を**合同式**といいます．mod はモッド（英語読み）とかモデュロ（仏語読み）と読みます．このように合同式を定義すると，合同式には次のような性質があることがわかります．

a, b, c, d を整数，n, m を自然数とするとき，$a \equiv b \pmod{n}$ かつ $c \equiv d \pmod{n}$ が成り立つとき，次の関係式が成り立つ．

（i） $a+c \equiv b+d \pmod{n}$　　（ii） $a-c \equiv b-d \pmod{n}$

（iii） $ac \equiv bd \pmod{n}$　　（iv） $a^m \equiv b^m \pmod{n}$

合同式は加法・減法・乗法に関しては，＝（イコール）の場合と同じ関係が成り立つ．

簡単に証明しておきましょう．

【証明】

a, b, c, d を n で割ったときの商をそれぞれ q_a, q_b, q_c, q_d とし，余りをそれぞれ r_a, r_b, r_c, r_d とする．このとき，$a \equiv b \pmod{n}$ かつ $c \equiv d \pmod{n}$ が成り立つことから，

$$r_a = r_b \text{ かつ } r_c = r_d$$

が成り立つ．よって，

$$a = nq_a + r_a,\quad b = nq_b + r_a,\quad c = nq_c + r_c,\quad d = nq_d + r_c$$

と置くことができる.

（ i ）の**【証明】**

$$a+c=nq_a+r_a+nq_c+r_c=n(q_a+q_c)+r_a+r_c$$

$$b+d=nq_b+r_a+nq_d+r_c=n(q_b+q_d)+r_a+r_c$$

となることからいずれも n で割った余りは r_a+r_c となるので，$a+c\equiv b+d \pmod n$ が成り立つ.

（ ii ）の**【証明】**

$$a-c=nq_a+r_a-nq_c-r_c=n(q_a-q_c)+r_a-r_c$$

$$b-d=nq_b+r_a-nq_d-r_c=n(q_b-q_d)+r_a-r_c$$

となることからいずれも n で割った余りは r_a-r_c となるので，$a-c\equiv b-d \pmod n$ が成り立つ.

（iii）の**【証明】**

$$ac=(nq_a+r_a)(nq_c+r_c)=n(nq_aq_c+q_ar_c+r_aq_c)+r_ar_c$$

$$bd=(nq_b+r_a)(nq_d+r_c)=n(nq_bq_d+q_br_c+r_aq_d)+r_ar_c$$

となることからいずれも n で割った余りは r_ar_c となるので，$ac\equiv bd \pmod n$ が成り立つ.

（iv）の**【証明】**

$$\begin{aligned} a^m &= (nq_a+r_a)^m \\ &= {}_m\mathrm{C}_0(nq_a)^m+{}_m\mathrm{C}_1(nq_a)^{m-1}r_a+{}_m\mathrm{C}_2(nq_a)^{m-2}(r_a)^2+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}nq_a(r_a)^{m-1}+{}_m\mathrm{C}_m(r_a)^m \\ b^m &= (nq_b+r_a)^m \\ &= {}_m\mathrm{C}_0(nq_b)^m+{}_m\mathrm{C}_1(nq_b)^{m-1}r_a+{}_m\mathrm{C}_2(nq_b)^{m-2}(r_a)^2+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}nq_b(r_a)^{m-1}+{}_m\mathrm{C}_m(r_a)^m \end{aligned}$$

となることからいずれも n で割った余りは $(r_a)^m$ となるので，$a^m\equiv b^m \pmod n$ が成り立つ.

このようにして，性質が証明されますが，この証明で次のような事実が判明します.

和の余りは，余りの和

積の余りは，余りの積

もちろん，差や累乗に関しても同様の結果が得られていることがわかります．実は，余りに関する問題を扱うときに非常に大切な考え方なので，必ず理解しておいてください．これに関しては，整数問題**【初級編】**の p.9, 10 でも解説しているので，参考にしてください.

次に，今後よく利用する式を紹介して証明しておきましょう．

x, a, b, n を自然数とするとき，次の合同式が成り立つ．

$$(ax+b)^n \equiv b^n \quad (\text{mod } x)$$

【証明】

二項定理を用いて左辺を展開すると，

$$\begin{aligned}(ax+b)^n &= {}_n\mathrm{C}_0(ax)^n + {}_n\mathrm{C}_1(ax)^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2(ax)^{n-2}b^2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}(ax)b^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n \\ &= ax({}_n\mathrm{C}_0(ax)^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_1(ax)^{n-2}b + {}_n\mathrm{C}_2(ax)^{n-3}b^2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}b^{n-1}) + b^n\end{aligned}$$

となるので，左辺を x で割った余りは b^n となるので，

$$(ax+b)^n \equiv b^n \quad (\text{mod } x)$$

が成り立つことが示された． **【証明終】**

さて，まずはこの式が自由自在に使えるようになっておく必要があるので，その練習から始めましょう．

例題 類題演習 ☞ p.20

次の各問いに答えよ．

（1） 12^{65} を 11 で割った余りを求めよ．

（2） 2^{65} を 11 で割った余りを求めよ．

（3） n を自然数とするとき，$13^{2n}+6$ は 7 で割り切れることを示せ．

（1）は $12=11+1$ と分解し，（2）では $2^{65}=(2^5)^{13}=(33-1)^{13}$ と変形し，（3）では $13=14-1$ と変形します．なんとかして 11 の倍数との和や差に変形することが大切です．

♣ ♠

解答 と **解説**

（1） $12^{65}=(11+1)^{65}\equiv 1^{65} \quad (\text{mod } 11)$

ゆえに，求める余りは **1**……(答)

（2） $$\begin{aligned}2^{65} &= (2^5)^{13}=(33-1)^{13}\equiv(-1)^{13} \quad (\text{mod } 11) \\ &= -1 \equiv 11-1 \quad (\text{mod } 11) \\ &= 10\end{aligned}$$

ゆえに，求める余りは **10**……(答)

（3） **【証明】**

$$\begin{aligned}13^{2n}+6 &= (14-1)^{2n}+6 \equiv (-1)^{2n}+6 \quad (\text{mod } 7) \\ &= 1+6 \equiv 0 \quad (\text{mod } 7)\end{aligned}$$

ゆえに，示された． **【証明終】**

♣ ♠

注意したいのは，合同式を用いたときは 解答 にあるように，必ず（mod n）を書くということです．何を法として合同なのかがわからないと意味がないからです．このように，合同式を使うとあっという間に証明できることがわかります．整数問題**【初級編】**の p.8 の 例題 や p.11 の **5** の問題もこれと同じ方法で計算できるのでやってみて下さい．それでは，類題を解いてみましょう．

◀類題演習▶

6 解答 ☞ p.21

次の各問いに答えよ．

(1) 7^{100} を 5 で割った余りを求めよ．

(2) 3^{52} を 11 で割った余りを求めよ．

(3) n が自然数のとき，$2^{n+1}+3^{2n-1}$ は 7 で割り切れることを証明せよ．

7 （'00　熊本県立大） 解答 ☞ p.22

今日は金曜日であるとする．

(1) 10^6 日後は何曜日か．

(2) 10^{100} 日後は何曜日か．

(3) 3^{100} 日後は何曜日か．

8 解答 ☞ p.23

3^{15} および $(3^{15})^{15}$ の 1 の位を求めよ．

9 解答 ☞ p.24

n を自然数とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) $3^{n+1}+4^{2n-1}$ は 13 で割り切れることを示せ．

(2) $3^{4n+2}+5^{2n+1}$ は 14 で割り切れることを示せ．

6 解答 と 解説

（1）
$$\begin{aligned} 7^{100} &= (5+2)^{100} \equiv 2^{100} \pmod 5 \\ &= 4^{50} = (5-1)^{50} \\ &\equiv (-1)^{50} \pmod 5 \\ &= \mathbf{1} \cdots\cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned} 3^{52} &= 9^{26} = (11-2)^{26} \\ &\equiv (-2)^{26} \pmod{11} \\ &= 2^{26} = 2\cdot 2^{25} = 2\cdot 32^5 = 2(33-1)^5 \\ &\equiv 2(-1)^5 \pmod{11} \\ &= -2 \\ &\equiv 9 \pmod{11} \end{aligned}$$

ゆえに，求める余りは，**9**……(答)

（3）**【証明】**

$$\begin{aligned} 2^{n+1}+3^{2n-1} &= 2^{n+1}+3\cdot 3^{2n-2} \\ &= 2^{n+1}+3\cdot 9^{n-1} \\ &\equiv 2^2\cdot 2^{n-1}+3\cdot 2^{n-1} \pmod 7 \\ &= 7\cdot 2^{n-1} \\ &\equiv 0 \pmod 7 \end{aligned}$$

ゆえに，7 で割り切れることが示された． **【証明終】**

♣ ♢ ♠ ♡

解説

（1）は 5 を法として合同な式を作るので，できるだけ底を 5 に近い数になるように変形することを考えます．なお，a^n において，a のことを底（てい）といいます．

（2）に関しても同様に 11 を法として合同式を作るので，底を 11 に近い数になるよう指数部分を使って変形をします．ただし，指数部分が分数になってはいけないので，

$$2^{26} = 32^{\frac{26}{5}}$$

のような変形をしてはいけません．このような事態を回避するために，$2^{26} = 2\cdot 2^{25}$ として，$2\cdot 32^5$ としているのです．

（3）は，底が統一されていないので，合同式を用いて底を統一することを考えます．最初の変形で $3^{2n-1} = 3\cdot 3^{2n-2}$ としているのは，$3^{2n-2} = (3^2)^{n-1}$ という変形がしたいからです．$3^2 = 9$ が 7 に近い数であることから 7 を法として合同式を作ることを考えます．このことから，このような変形をするのです．

7 解答 と 解説

（1） 7 で割った余りを計算すればよい.

$$\begin{aligned} 10^6 &= (7+3)^6 \\ &\equiv 3^6 \pmod 7 \\ &= 9^3 = (7+2)^3 \\ &\equiv 2^3 \pmod 7 \\ &\equiv 1 \pmod 7 \end{aligned}$$

よって，10^6 日後は, **土曜日**……(**答**)

（2） (1) より，$10^6 \equiv 1 \pmod 7$ であるから,

$$\begin{aligned} 10^{100} &= (10^6)^{16} \cdot 10^4 \\ &\equiv 10^4 \pmod 7 \\ &\equiv 3^4 \pmod 7 \\ &\equiv 4 \pmod 7 \end{aligned}$$

よって，10^{100} 日後は, **火曜日**……(**答**)

（3）

$$\begin{aligned} 3^{100} &\equiv (7+3)^{100} \pmod 7 \\ &\equiv 4 \pmod 7 \quad (\because (2)) \end{aligned}$$

よって，3^{100} 日後は, **火曜日**……(**答**)

♣ ♢ ♠ ♡

解説

1 週間は 7 日なので，7 を法とした合同式を考えます．前問の結果をうまく使えば，計算が幾分か省略できることに気付きましょう．

8 解答 と 解説

(1) 10 で割った余りを計算すればよい.

$$\begin{aligned} 3^{15} &= 3\cdot(3^2)^7 \\ &\equiv 3\cdot(-1)^7 \pmod{10} \\ &= -3 \\ &\equiv 7 \pmod{10} \end{aligned}$$

よって, 3^{15} の 1 の位は, **7**……(**答**)

(2) (1) より, $3^{15} \equiv 7 \pmod{10}$ であるから,

$$\begin{aligned} (3^{15})^{15} &\equiv 7^{15} \pmod{10} \\ &= (10-3)^{15} \pmod{10} \\ &\equiv (-3)^{15} \pmod{7} \\ &= -3^{15} \\ &\equiv -7 \pmod{10} \quad (\because (1)) \\ &\equiv 3 \pmod{10} \end{aligned}$$

よって, $(3^{15})^{15}$ の 1 の位は, **3**……(**答**)

♣ ◊ ♠ ♡

解説

1 の位を考えるので, 地道に計算してもそれほど大変ではありません. 合同式を使うのであれば, 10 を法として考えましょう.

9 解答 と 解説

（1）**【証明】**

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= 3^2\cdot 3^{n-1}+4\cdot 4^{2(n-1)}\\
&\equiv 9\cdot 3^{n-1}+4\cdot 3^{n-1}\pmod{13}\\
&= 13\cdot 3^{n-1}\\
&\equiv 0\pmod{13}
\end{aligned}
$$

ゆえに，13 で割り切れることが示された. **【証明終】**

（2）**【証明】**

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= 9^{2n+1}+5^{2n+1}\\
&\equiv (-5)^{2n+1}+5^{2n+1}\pmod{14}\\
&= -5^{2n+1}+5^{2n+1}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

ゆえに，14 で割り切れることが示された. **【証明終】**

♣ ◇ ♠ ♡

解説

底をそろえることを考えます.（1),（2）ともに大きな数で割るので，よく考えて底をそろえましょう.

合同式に関しての基本的な計算などができるようになれば，後は実戦に取り組んでいきましょう．合同式が題材になった入試問題を紹介するので，解いてみてください.

10（′00　名古屋大） 解答 ☞ p.25

自然数 x, y に対して，それぞれを 100 で割った余りが等しいとき，$x\equiv y$ と書くことにする.

（1）　自然数 m に対して，$76^m\equiv 76$ を証明せよ.

（2）　$2^n\equiv 76$ をみたす最小の自然数 n を求めよ.

（3）　2^{1001} を 100 で割った余りを求めよ.

10 解答 と 解説

（1）【証明】

$76^2 = 5776 \equiv 76$ より，$76^3 \equiv 76^2 \equiv 76$ となるので，以後これを繰り返し用いると，

$$76^m \equiv 76$$

となることがわかるので，示された．　　　　【証明終】

（2） 2^n の下 2 桁を $f(n)$ で表すことにすると，下表を得る．

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f(n)$	2	4	8	16	32	64	28	56	12	24	48	96	92	84	68	36	72	44	88	76

ゆえに，$\boldsymbol{n = 20}$……(答)

（3） （2）より，$2^{20} \equiv 76$ であるから，

$$2^{1000} = (2^{20})^{50} \equiv 76^{50} \equiv 76 \quad (\because \ (1))$$

よって，$2^{1001} \equiv 2 \cdot 76 = 152 \equiv 52$ より，求める余りは **52**……(答)

――――― ♣ ――――― ♢ ――――― ♠ ――――― ♡ ―――――

解説

（1）は，厳密には数学的帰納法で証明する方がよいでしょうが，明らかに規則性がわかるので，解答では省略しました．（2）は，答えの書き方で迷いますが，思い切って表をかき，地道に探すのが一番早いでしょう．ただ，考えるのは下 2 桁だけでよいので，$f(n)$ という関数を作りました．（3）は，(1), (2) で得られた事実をどのように利用するかがポイントになります．

直線・曲線の通過領域問題

今回は，定数を含んだ直線や曲線が定数の値を色々変えることで通過する領域を求める問題を扱います．とは言ってもやったことがない人にとってみれば何言ってるかもよく分からないかもしれません．よく見かける問題なのですが，対策ができていない人や 1 度はやったことあるけど，よくわからないという人が多いと思います．ここで，しっかりと自分のものにしてしまいましょう！では，まず簡単な例題を使って説明します．

例題　t がすべての実数を動くとき，直線

$$y = tx + t^2 - 1 \quad \cdots\cdots(*)$$

が通る領域を図示せよ．

まずは，問題文がどういうことを問うているかを理解する必要があります．t の値を色々変えて，グラフをかいてみましょう．

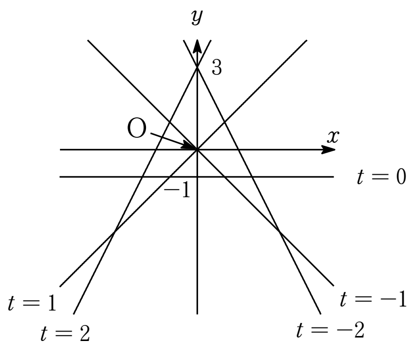
$t = -2$ のとき，　$y = -2x + 3$

$t = -1$ のとき，　$y = -x$

$t = 0$ のとき，　$y = -1$

$t = 1$ のとき，　$y = x$

$t = 2$ のとき，　$y = 2x + 3$



このように，t の値を色々変えると，$(*)$ は様々な直線を表すことがわかると思います．問題文は t がすべての実数値をとるときに，この直線 $(*)$ が平面を埋め尽くす部分を図示しなさいと言っているのです．

しかしながら，すべての実数 t を調べるわけにはいきません．どうすればよいのでしょうか？逆を考えてみましょう．例えば，$(*)$ が点 $(0, 0)$ を通るとき，

$$t^2 - 1 = 0 \iff t = \pm 1$$

となります．これは $t = \pm 1$ のときに，$(*)$ が点 $(0, 0)$ を通ることを表しているのです．また，点 $(1, 1)$ はどうでしょうか？このとき，

$$1 = t + t^2 - 1 \iff t^2 + t - 2 = 0 \iff (t+2)(t-1) = 0 \quad \therefore \ t = -2, 1$$

したがって，$t = -2, 1$ のときに $(*)$ が点 $(1, 1)$ を通ることがわかります．では，$(0, -3)$ はどうでしょう？このとき，

$$-3 = t^2 - 1 \iff t^2 = -2 \quad \therefore \ t = \sqrt{2}i \quad (i \text{ は虚数単位})$$

となり，実数 t が存在しません．つまり，t が実数全体を動く限り $(*)$ は点 $(0, -3)$ を通ることができないのです．

このように見ていくと，次のようにまとめることができます．

$(*)$ が点 (X, Y) を通る．$\Longrightarrow$ t についての方程式 $Y = tX + t^2 - 1$ が実数解をもつ．

実は，この類の問題はこの部分が理解できれば 9 割り方理解したのと同じことなのです．あとは，2 次方程式の実数解の問題になりますから，そこがしっかりしていればそれほど難しくはないでしょう．では，**例題** の解答を載せて

おきます．

♣ ♠

解答 と **解説**

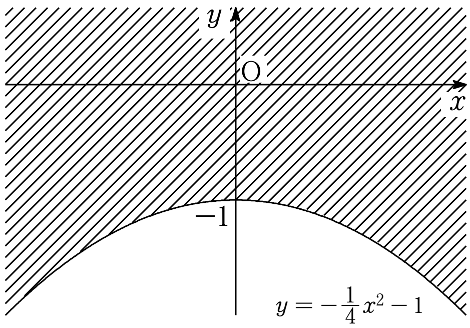
$y=tx+t^2-1$ が点 (X, Y) を通るとき，

$$Y=tX+t^2-1 \iff t^2+Xt-Y-1=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

であるから，この t についての 2 次方程式が実数解をもてばよい．よって，判別式を D とすると，

$$D=X^2-4(-Y-1)\geqq 0 \iff X^2+4Y+4\geqq 0$$
$$\iff Y\geqq -\frac{1}{4}X^2-1$$

ゆえに，求める領域は下図の斜線部分で境界線上の点も含む．



♢ ♡

解説

実数 t に様々な値を代入して得られる直線が通る領域がこれで図示できました．問題はここで終わりですが，少しこの答えについて考察してみましょう．上図の境界に現れる曲線が何を表しているのかを考えてみましょう．境界の曲線は，解答をみればわかるように $D=0$ のときのものです．これは，$(*)$ が重解をもつときですから，言い換えれば与えられた直線はこの境界に現れる放物線に接しているということになります．要するに，与えられた直線は，t の値を変化させることで，この放物線に接しながら動くということなのです．そして，この放物線には,『包絡線』という名前がついています．参考程度に知っておくとよいでしょう．

では，類題を解いてみましょう．

◀類題演習▶

1 解答 ☞ p.3

k がすべての実数をとって変化するとき，直線 $2kx+y+k^2=0$ が通る領域を図示せよ．

2 解答 ☞ p.3

t がすべての実数をとって変化するとき，放物線 $y=2tx^2-t^2+t-1$ が通る領域を図示せよ．

3 解答 ☞ p.4

k がすべての実数をとって変化するとき，直線 $2kx-k^2-y+2=0$ が通らない領域を図示せよ．

1 解答 と 解説

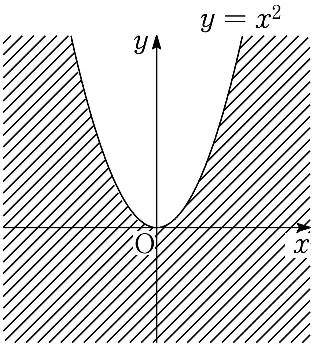
直線 $2kx+y+k^2=0$ が通過する領域内の点を $(X,\,Y)$ とおくと,

$$2kX+Y+k^2=0 \iff k^2+2Xk+Y=0 \quad \cdots\cdots①$$

k はすべての実数をとるので,① を k の 2 次方程式とみなし判別式を D とすると,

$$D/4=X^2-Y \geqq 0 \quad \therefore \quad Y \leqq X^2$$

ゆえに,直線 $2kx+y+k^2=0$ が通過する領域は下図の斜線部分で境界線上の点を含む.



♣ ♢ ♠ ♡

解説

k はすべての実数をとるので,k についての 2 次方程式において判別式だけで結論を得ます.図示した後は,境界線上の点を含むか否かを述べることを忘れないようにしましょう.

2 解答 と 解説

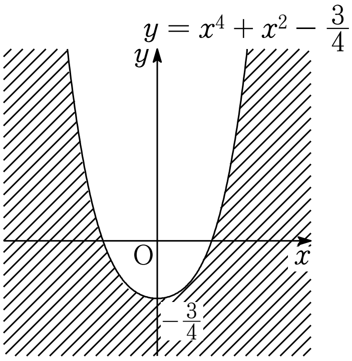
放物線 $y=2tx^2-t^2+t-1$ が通過する領域内の点を $(X,\,Y)$ とおくと,

$$Y=2tX^2-t^2+t-1 \iff t^2-(2X^2+1)t+Y+1=0 \quad \cdots\cdots①$$

t はすべての実数をとるので,① を t の 2 次方程式とみなし判別式を D とすると,

$$D=(2X^2+1)^2-4(Y+1) \geqq 0 \iff Y \leqq X^4+X^2-\frac{3}{4}$$

ゆえに,放物線 $y=2tx^2-t^2+t-1$ が通過する領域は下図の斜線部分で境界線上の点を含む.



♣ ♢ ♠ ♡

解説

4 次関数のグラフをかくのためには微分積分の分野を学習していないといけません.未履修の人は,領域を表す式が導けた時点で良しとしましょう.

3 解答 と 解説

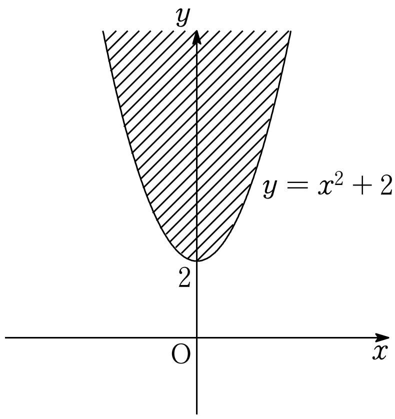
直線 $2kx-k^2-y+2=0$ が通過しない領域内の点を (X,Y) とおくと，

$$2kX-k^2-Y+2=0 \iff k^2-2Xk+Y-2=0 \quad \cdots\cdots①$$

直線が通過しないということは，① をみたす実数 k が存在しないということなので，① を k の 2 次方程式とみなし判別式を D とすると，

$$D/4=X^2-(Y-2)<0 \iff Y>X^2+2$$

ゆえに，直線 $2kx-k^2-y+2=0$ が通過しない領域は下図の斜線部分で境界線上の点を含まない．



♣ ♢ ♠ ♡

解説

本問のように，通過しない領域を考える場合は，通過する領域を求めて，その補集合をとってもよい．しかし，問題が理解できていれば，判別式で直接求めることができるので，視野を広げるという意味からもどちらの方法でもできるようにしておこう．

以上で，通過領域の基本部分は終わりです．理解できれば解答はそれほど難しくないことがわかると思います．しかし，ここからは問題がやや複雑化していきます．t に制限がついたり，式の形が複雑になったり，融合問題として他の分野と融合されたりと，様々な状況が考えられます．まずは，t に制限がついた場合をやっていき，最後に融合された実際の入試問題にもチャレンジしてみましょう．

例題 （’99　三重大）

放物線 $y=(x-a)^2+a^2$ を $a \geqq 0$ の範囲で移動させたとき，放物線が通過してできる領域を図示せよ．

さて，今度の問題では，a が 0 以上の範囲で移動したときという制限がついています．これは，先ほどの問題と同じように考えれば，与えられた方程式を a の 2 次方程式とみなして，

$$2a^2-2xa+x^2-y=0$$

とします．これが正の実数解をもつような x, y の条件を求めればよいのです．したがって，結果的には，2 次方程式の解の配置問題に帰着します．

♣　♠

解答 と **解説**

放物線 $y=(x-a)^2+a^2$ が通過する領域内の点を (X, Y) とおくと，

$$Y=(X-a)^2+a^2 \iff 2a^2-2Xa+X^2-Y=0$$

をみたす．これが $a \geqq 0$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもてばよい．
ここで，$f(a)=2a^2-2Xa+X^2-Y$ とおくと，

$$f(a)=2\left(a-\frac{X}{2}\right)^2+\frac{1}{2}X^2-Y$$

よって，

（ i ）　$\dfrac{X}{2} \geqq 0$ のとき　$\dfrac{1}{2}X^2-Y \leqq 0$

または

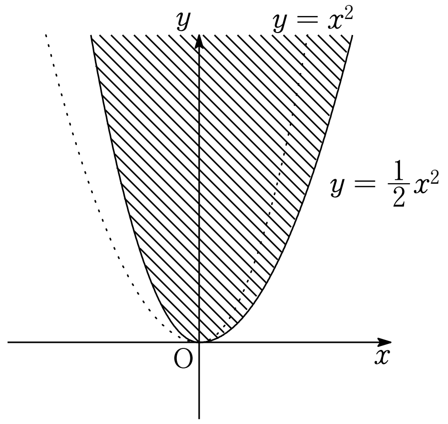
（ ii ）　$\dfrac{X}{2}<0$ のとき　$f(0) \leqq 0$

であればよい．

（ i ）のとき，$X \geqq 0$ かつ $Y \geqq \dfrac{1}{2}X^2$ である．

（ ii ）のとき，$X<0$ かつ $X^2-Y \leqq 0$ すなわち $Y \geqq X^2$ である．

ゆえに，求める通過領域は，次図の斜線部分で境界線上の点を含む．



◇　♡

解説

解いてみればわかりますが，2 次方程式の解の配置問題が理解できていなければ，きちんとした答えが導けません．通過領域の問題を解く際に非常に大切な分野が解の配置問題といえます．もしも，そこがまだよく理解できていない人は，早急に対策をする必要があるでしょう．

では，類題をいくつか挙げておくので，練習しましょう．

◀類題演習▶

4 （'06　神戸大・改）　解答 ☞ p.7

実数 t に対して xy 平面上の直線 $l_t : y = 2tx - t^2$ を考える．t が $|t| \geqq 1$ の範囲を動くとき，直線 l_t が通る点 $(x,\, y)$ の全体を図示せよ．

5 （'00　静岡文化芸術大・改）　解答 ☞ p.8

直線 $y = 2px + p^2 + 1$（p は定数）を l_p とする．p が $|p| \leqq 1$ の範囲を動くとき，直線 l_p が 2 回通り得る範囲を，図示せよ．

6 （'96　中京学院大）　解答 ☞ p.9

θ が $0 \leqq \theta \leqq \pi$ を動くとき，xy 平面上の直線 $y = 2(\sin\theta)x - \cos^2\theta + 1$ の通りうる範囲を式で表し，これを図示せよ．

これらの他にも円の通過領域や線分の通過領域など，発展的な問題は数多くあります．それは，演習ルームで扱うことにしましょう．

4 解答 と 解説

直線 $y=2tx-t^2$ が通過する領域内の点を $(X,\,Y)$ とおくと，

$$Y=2tX-t^2 \iff t^2-2Xt+Y=0 \quad \cdots\cdots①$$

t が $|t|\geqq 1$ の範囲を動くとき，直線 l_t が通過するということは，① をみたす実数 t が $|t|\geqq 1$ で少なくとも 1 つ存在すればよいので，① の左辺を $f(t)$ とすると，

$$f(t)=(t-X)^2+Y-X^2$$

（ｉ） $|X|<1$ のとき，

$f(-1)\leqq 0$ または $f(1)\leqq 0$ であればよいので，

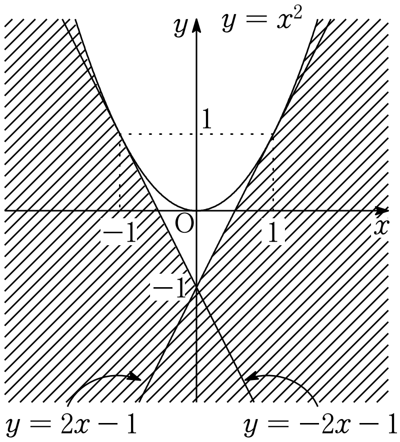
$$f(-1)\leqq 0 \iff 1+2X+Y\leqq 0 \iff Y\leqq -2X-1 \quad \cdots\cdots②$$

$$f(1)\leqq 0 \iff 1-2X+Y\leqq 0 \iff Y\leqq 2X-1 \quad \cdots\cdots③$$

（ii） $|X|\geqq 1$ のとき，

頂点の Y 座標が 0 以下であればよいので，$Y-X^2\leqq 0$ ……④

ゆえに，②〜④ より，直線 l_t の通過する領域は，下図の斜線部分で，境界線上の点を含む．



♣ ◊ ♠ ♡

解説

本問は，結果的に解の配置問題に帰着します．① を t についての 2 次方程式とみなし，その解が -1 以下の解をもつかあるいは 1 以上の解をもてばよいのです．範囲がある場合は，判別式だけでは条件不足なので，不慣れな人はきちんとグラフをかいて条件をみつけるようにしましょう．

5 解答 と 解説

直線 $y=2px+p^2+1$ が通過する領域内の点を (X,Y) とおくと,

$$Y=2pX+p^2+1 \iff p^2+2Xp+1-Y=0 \quad \cdots\cdots ①$$

p が $|p|\leqq 1$ の範囲を動くとき,直線 l_p が 2 回通過するということは,① をみたす実数 p が $|p|\leqq 1$ で 2 つ存在すればよいので,① の左辺を $f(p)$ とすると,

$$f(p)=(p+X)^2-X^2+1-Y$$

(i) $|-X|\leqq 1$ すなわち $-1\leqq X\leqq 1$ のとき,

$f(-X)<0$ かつ $f(-1)\geqq 0$ かつ $f(1)\geqq 0$ であればよいので,

$$f(-X)<0 \iff -X^2+1-Y<0 \iff Y>-X^2+1 \quad \cdots\cdots ②$$

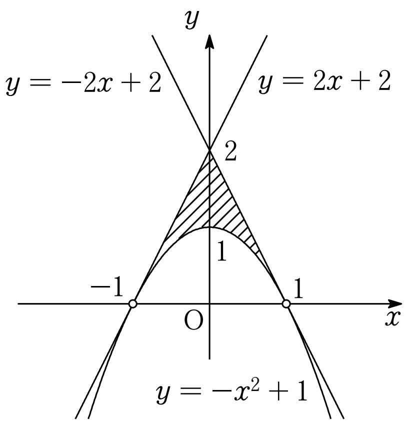
$$f(-1)\geqq 0 \iff 1-2X+1-Y\geqq 0 \iff Y\leqq -2X+2 \quad \cdots\cdots ③$$

$$f(1)\geqq 0 \iff 1+2X+1-Y\geqq 0 \iff Y\leqq 2X+2 \quad \cdots\cdots ④$$

(ii) $|-X|>1$ すなわち $X<-1,\ 1<X$ のとき,

① をみたす実数 p が $|p|\leqq 1$ で 2 つ存在することはないので不適.

ゆえに,②〜④ より,直線 l_p が 2 回通過する領域は,下図の斜線部分で,境界線上の点は直線上の点のみ含み,白丸部分と曲線上の点は含まない.



♣ ◇ ♠ ♡

解説

直線が 2 回通過するということは,実数 p の値が 2 つ存在するということになります.このことが理解できていれば,ここまでやってきたことがちゃんと身に付いているでしょう.あとは,解の配置問題になるので,正確な場合分けをしてやればよいだけです.

6 解答 と 解説

$y=2(\sin\theta)x-\cos^2\theta+1$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ において，$\sin\theta=t$ とおくと，$0\leqq t\leqq 1$ であり，与えられた方程式は，

$$y=2tx-(1-t^2)+1 \iff t^2+2xt-y=0$$

と変形することができる．この直線が通る領域内の点を (X, Y) とすると，

$$t^2+2Xt-Y=0 \quad \cdots\cdots ①$$

であるから，与えられた直線が通過するということは，① を t に関する 2 次方程式とみなすとき，この方程式の解が $0\leqq t\leqq 1$ の範囲の実数解をもてばよい．① の左辺を $f(t)$ とすると，

$$f(t)=(t+X)^2-X^2-Y$$

となる．

（ｉ） $-X\leqq 0$ すなわち $X\geqq 0$ のとき，

$f(0)\leqq 0$ かつ $f(1)\geqq 0$ であればよいので，

$$f(0)\leqq 0 \iff Y\geqq 0 \quad \cdots\cdots ②$$

$$f(1)\geqq 0 \iff Y\leqq 2X+1 \quad \cdots\cdots ③$$

（ii） $0<-X<1$ すなわち $-1<X<0$ のとき，

$f(-X)\leqq 0$ かつ「$f(0)\geqq 0$ または $f(1)\geqq 0$」であればよいので，

$$f(-X)\leqq 0 \iff Y\geqq -X^2 \quad \cdots\cdots ④$$

$$f(0)\geqq 0 \iff Y\leqq 0 \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$f(1)\geqq 0 \iff Y\leqq 2X+1 \quad \cdots\cdots ⑥$$

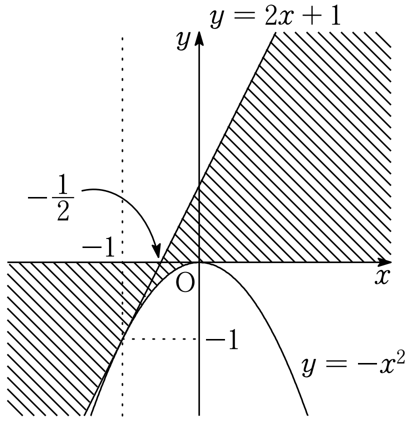
（iii） $1\leqq -X$ すなわち $X\leqq -1$ のとき，

$f(0)\geqq 0$ かつ $f(1)\leqq 0$ であればよいので，

$$f(0)\geqq 0 \iff Y\leqq 0 \quad \cdots\cdots ⑦$$

$$f(1)\leqq 0 \iff Y\geqq 2X+1 \quad \cdots\cdots ⑧$$

ゆえに，②～⑧ より，与えられた直線が通過する領域は，右図の斜線部分で，境界線上の点は含む．



♣ ♢ ♠ ♡

解説

これまでの通過領域の問題を応用した問題です．しかし，置き換えを行えばこれまでの問題と同じになるので，それほど難問ではありません．このように，少し形が変わったものもあるので，しっかり類題演習をしておきましょう．

1．　漸化式【初級編・基本４形態】

第１回は，最も基本的な漸化式を４つ扱います．名付けて**【基本４形態】**！
当然のことですが，受験生がこの４つを知らないなんてあり得ません！「このぐらいは知ってるよ！今更やるまでもない！」っていう声が聞こえてきそうですが，中には苦手な人や１・２年生で漸化式を始めたばかりの人もいると思うので，まとめてみました．こんなの楽勝という人はここは無視して次の**【中級編】**へ進んでください．

【基本４形態】

❶ …… $a_{n+1} = a_n + q$　（等差数列型）

❷ …… $a_{n+1} = pa_n$　（等比数列型）

❸ …… $a_{n+1} = a_n + f(n)$　（階差数列型）

❹ …… $a_{n+1} = pa_n + q$　（基本隣接２項間漸化式）

ここで挙げる４つの形態は，隣接２項間漸化式の基本形態なので，漸化式をみたときに瞬時にどのタイプなのかを

❶，❸ 4 ❶ $(a_n$

4 ）．**定数** ❸ $f(n)$ 4 で n [1]

❶，❷ ❹ ❹ 4

$$\begin{cases} \text{(i)}\quad p = 1 & ❶ \\ \text{(ii)}\quad q = 0 & ❷ \end{cases}$$

で

4 み 4

[1] $f(n)$ で 4 $f(n)$ a_n で で に 4 み で 4

1　等差数列型

【等差数列型】

$$a_{n+1} = a_n + q$$

【解法と解説】

$a_{n+1} - a_n = q$ … $n+1$ … n … 4 … q

… q … 4

… a_n …

$$a_n = a_1 + (n-1)q$$

例題 1

$\{a_n\}$ …

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 4$$

解

2， … 4 …

$$a_n = 2 + (n-1)4 \iff a_n = 4n - 2 \cdots\cdots(\quad)$$

2　等比数列型

【等比数列型】

$$a_{n+1} = pa_n$$

【解法と解説】

n　p　$n+1$　で　p　4

a_n

$$a_n = a_1 p^{n-1}$$

例題 2

$\{a_n\}$　み

$$a_1 = 3\ ,\ \ a_{n+1} = 5a_n$$

解

3 ,　5

$$a_n = 3\cdot5^{n-1}\cdots\cdots(\quad)$$

3　階差数列型

【階差数列型】

$$a_{n+1}=a_n+f(n)$$

【解法と解説】

$a_{n+1}-a_n=f(n)$ 4 で 1 $n+1$ n 4 で で $f(n)$ で $\{f(n)\}$ $\{a_n\}$ a_n み で

$$n \geqq 2 \quad a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

注　$n=1$

注　$\sum$ $n-1$

参考……$f(n)$ 1

例題 3

$\{a_n\}$ み

$$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+2n$$

解

$\{a_n\}$ $\{b_n\}$ $b_n=2n$ [2]

$n \geqq 2$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 2+\sum_{k=1}^{n-1} 2k \\ &= 2+2\cdot\frac{1}{2}n(n-1) \\ &= n^2-n+2 \end{aligned}$$

$n=1$ $a_1=1-1+2=2$ で n 4

$$a_n=n^2-n+2\cdots\cdots(\quad)$$

[2] 4 で で

4 基本隣接２項間漸化式

【基本隣接２項間漸化式】

$$a_{n+1} = pa_n + q$$

【解法と解説】

$a_{n+1} = pa_n + q$……①，

$$\alpha = p\alpha + q……②$$

①, ②

$$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$$

で $b_n = a_n - \alpha$ 2，

参考……② 特性方程式 4

（ｉ） $p = 1$ 1

（ii） $q = 0$ 2

例題 4

$\{a_n\}$

$$a_1 = 3\ ,\ a_{n+1} = 2a_n + 2$$

解 *3

$$a_{n+1} + 2 = 2(a_n + 2)$$

$b_n = a_n + 2$

$$b_{n+1} = 2b_n\ ,\ b_1 = a_1 + 2 = 5$$

$\{b_n\}$ 5 2

$$b_n = 5 \cdot 2^{n-1} \iff a_n = 5 \cdot 2^{n-1} - 2……(\quad)$$

*3 4 4

◀基本４形態問題演習▶

$\boxed{1}$ 基本（解 ☞p.7）

$\{a_n\}$

(1) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 5$	(6) $a_1 = 2$, $2a_{n+1} = a_n$
(2) $a_1 = 9$, $a_{n+1} = 3a_n$	(7) $a_1 = -2$, $a_{n+1} - a_n = -4^{n-1}$
(3) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2n - 1$	(8) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$
(4) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n - 3$	(9) $a_1 = -3$, $a_{n+1} = a_n - 2$
(5) $a_1 = 1$, $6a_{n+1} = 3a_n + 4$	(10) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2$

◀基本４形態問題演習【解答】▶

【基本４形態】

$\boxed{1}$

（1）　$a_n = 5n - 2$

（2）　$a_n = 3^{n+1}$

（3）　$a_n = n^2 - 2n + 2$

（4）　$a_n = \dfrac{3^{n-1} + 3}{2}$

（5）　$a_n = -\dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \dfrac{4}{3}$

（6）　$a_n = 2^{2-n}$

（7）　$a_n = -\dfrac{4^{n-1} + 5}{3}$

（8）　$a_n = 2^{n+1} - 1$

（9）　$a_n = -2n - 1$

（10）　$a_n = -2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} + 3$

2. 漸化式【中級編・頻出８形態】

【頻出８形態】

【頻出８形態】

❺ ……	$a_{n+1} = pa_n + qr^n$	（定数項べき乗型）
❻ ……	$a_{n+1} = pa_n + f(n)$	（定数項多項式型）
❼ ……	$a_{n+1} = qa_n^p$	（一般項べき型）
❽ ……	$a_{n+1} = \dfrac{pa_n + q}{ra_n + s}$	（分数型）
❾ ……	$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n + r = 0$	（基本隣接３項間漸化式）
❿ ……	$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$	（連立漸化式）
⓫ ……	$a_{n+1} = f(n)a_n$	（係数変化型）
⓬ ……	$S_n = pa_n + q \ (p \neq 1)$	（和・一般項混合型）

❺，❻ ❸ a_n 1、 ❺，❻ $p = 1$ ❸

❼ ❽ $q = 0$ $q \neq 0$ $r = 0$ $r \neq 0$

❾ 3 $r = 0$

❿ 2 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 2 [4]

⓫ n 4 3

⓬

[4] a_n b_n 4

❺　定数項べき乗型

【定数項べき乗型】

$$a_{n+1} = pa_n + qr^n$$

【解法と解説】

$p^{n+1} \neq 0$、 $\dfrac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \dfrac{a_n}{p^n} + \dfrac{q}{p}\cdot\left(\dfrac{r}{p}\right)^n$ で ❸ に帰着される

$r^{n+1} \neq 0$、 $\dfrac{a_{n+1}}{r^{n+1}} = \dfrac{p}{r}\dfrac{a_n}{r^n} + \dfrac{q}{r}$ で ❹ に帰着される

✏注 n $n+1$ で $n+1$ 4 4 で

例題 5

$\{a_n\}$

$$a_1 = 1\,,\ a_{n+1} = 2a_n + 3^n$$

解

3^{n+1}、

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3}$$

$b_n = \dfrac{a_n}{3^n}$

$$b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3} \quad ☜ ❹$$

$$b_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}(b_n - 1)$$

$\{b_n - 1\}$ $b_1 - 1 = \dfrac{a_1}{3} - 1 = -\dfrac{2}{3}$ $\dfrac{2}{3}$

$$b_n - 1 = -\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$b_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$$

$\{a_n\}$

$$a_n = 3^n\left\{-\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right\} \quad \therefore\ a_n = 3^n - 2^n \cdots\cdots(\quad)$$

❹ 4 2^{n+1}、 ❸

❻ 定数項多項式型

【定数項多項式型】

$$a_{n+1} = pa_n + f(n)$$

【解法と解説】

❹ に帰着し　❸ で処理できる

$f(n)$　1　　$a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = p(a_n + \alpha n + \beta)$

$f(n)$　2　　$a_{n+1} + \alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \gamma = p(a_n + \alpha n^2 + \beta n + \gamma)$

α, β, γ　❷ で処理

例題 6

$\{a_n\}$

$$a_1 = 1\ ,\ \ a_{n+1} = 2a_n + n + 1$$

解

$$a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 2(a_n + \alpha n + \beta)$$

$$a_{n+1} = 2a_n + \alpha n - \alpha + \beta$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ -\alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

$\alpha = 1, \beta = 2$ で　α, β [5]

$$a_{n+1} + (n+1) + 2 = 2(a_n + n + 2) \quad ☜ ❷$$

$\{a_n + n + 2\}$　$a_1 + 1 + 2 = 4$　2　$\{a_n\}$

$$a_n + n + 2 = 4 \cdot 2^{n-1} \iff a_n = 2^{n+1} - n - 2 \cdots\cdots(\quad)$$

別解

$$\begin{cases} a_{n+2} = 2a_{n+1} + n + 2 \\ a_{n+1} = 2a_n + n + 1 \end{cases}$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) + 1$$

で　$b_n = a_{n+1} - a_n$

$$b_{n+1} = 2b_n + 1 \iff b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$$

$\{b_n + 1\}$　$b_1 + 1 = a_2 - a_1 + 1 = 4$　2

$$b_n + 1 = 4 \cdot 2^{n-1} \iff b_n = 4 \cdot 2^{n-1} - 1 \iff a_{n+1} - a_n = 4 \cdot 2^{n-1} - 1$$

---

[5] 4　4　で　p, α, β, γ

で $\{a_n\}$ の $\{b_n\}$、 $n \geqq 2$ の、

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4 \cdot 2^{k-1} - 1) \\
&= 1 + \frac{4(2^{n-1}-1)}{2-1} - (n-1) \\
&= 2^{n+1} - n - 2
\end{aligned}
$$

$n = 1$ の、 $a_1 = 2^2 - 1 - 2 = 1$ での、 $n = 1$ の、

$$a_n = 2^{n+1} - n - 2 \cdots\cdots (\quad)$$

7　一般項べき型

【一般項べき型】

$$a_{n+1} = qa_n^p$$

【解法と解説】

$$\log_q a_{n+1} = \log_q qa_n^p = p\log_q a_n + 1$$

で　**4** に帰着される

例題 7

$\{a_n\}$

$$a_1 = 4\,,\ \ \sqrt{a_{n+1}} = 2\sqrt[3]{a_n}$$

解[6]

$$\sqrt{a_{n+1}} = 2\sqrt[3]{a_n} \iff (a_{n+1})^{\frac{1}{2}} = 2(a_n)^{\frac{1}{3}} \iff a_{n+1} = 2^2(a_n)^{\frac{2}{3}}$$

$a_n > 0$、　2

$$\begin{aligned}\log_2 a_{n+1} &= \log_2 2^2 + \log_2(a_n)^{\frac{2}{3}}\\ &= \frac{2}{3}\log_2 a_n + 2\end{aligned}$$

$\log_2 a_n = b_n$

$$b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + 2 \iff b_{n+1} - 6 = \frac{2}{3}(b_n - 6)$$

$\{b_n - 6\}$　$b_1 - 6 = \log_2 a_1 - 6 = -4$　$\frac{2}{3}$

$$b_n - 6 = -4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \iff b_n = -4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 6$$

$\{a_n\}$

$$a_n = 2^{\left\{-4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+6\right\}}\cdots\cdots(\quad)$$

[6] で　a_n　$(a_n > 0)$　4

8　分数型

【分子の定数項が０の場合)】

$$a_{n+1} = \frac{pa_n}{ra_n + s}$$

【解法と解説】

$a_n \neq 0$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{s}{pa_n} + \frac{r}{p}$$

で　**4** に帰着される

例題 8－1

$\{a_n\}$

$$a_1 = 1\ ,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 3}$$

解[7]

$a_1 \neq 0$　$a_n \neq 0$ で

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 3\frac{1}{a_n} + 2$$

$\frac{1}{a_n} = b_n$

$$b_{n+1} = 3b_n + 2 \iff b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$$

$\{b_n + 1\}$　$b_1 + 1 = \frac{1}{a_1} + 1 = 2$　3

$$b_n + 1 = 2 \cdot 3^{n-1} \iff b_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$$

$\{a_n\}$

$$a_n = \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1} - 1} \cdots\cdots(\quad)$$

[7] a_n　0、で

【分子の定数項が０でない場合)】

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s}$$

【解法と解説】

$x = \dfrac{px+q}{rx+s}$ 2 α，$\beta\ (\alpha > \beta)$ に $b_n = \dfrac{a_n - \alpha}{a_n - \beta}$ $\{b_n\}$ で **❷ に帰着される**

2 $(x = \alpha)$ で $b_n = \dfrac{1}{a_n - \alpha}$ $\{b_n\}$

で **❶ に帰着される**

例題 8－2

$\{a_n\}$ み

$$a_1 = 0\ ,\ a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 2}$$

解 *8

$x = \dfrac{3x+2}{x+2}$

$$x(x+2) = 3x+2 \iff x = 2, -1$$

4 $b_n = \dfrac{a_n - 2}{a_n + 1}$ $a_n = \dfrac{-b_n - 2}{b_n - 1}$、

$$\frac{-b_{n+1} - 2}{b_{n+1} - 1} = \frac{3\dfrac{-b_n - 2}{b_n - 1} + 2}{\dfrac{-b_n - 2}{b_n - 1} + 2} \iff b_{n+1} = \frac{1}{4} b_n$$

$b_1 = \dfrac{a_1 - 2}{a_1 + 1} = -2$、 $\{b_n\}$ -2 $\dfrac{1}{4}$

$$b_n = -2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \iff a_n = \frac{2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - 2}{-2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - 1}$$

み $\{a_n\}$

$$a_n = \frac{2\cdot 4^{n-1} - 2}{4^{n-1} + 2} \cdots\cdots(\quad)$$

*8 4 4

❾ 基本隣接３項間漸化式

【基本隣接３項間漸化式】

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n + r = 0$$

【解法と解説】

$r = 0$ … $x^2 + px + q = 0$（特性方程式 … ）… $x = \alpha, \beta$ …

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \end{cases}$$

… ❷ …

$$a_{n+1} - \gamma a_n \ (\gamma = \alpha \text{ or } \beta)$$

… ❹ に帰着する …

$r \neq 0$ … r … ❹ に帰着 … 0 … $x = \alpha, \beta$ … 1 …

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = a_{n+1} - \alpha a_n = \cdots\cdots = a_2 - \alpha a_1$$

… ❹ に帰着される

✎注　a_{n+2} の係数が 1 以外の時も同様にして解くことができる.

例題 9

… $\{a_n\}$ …

$$a_1 = 1\ ,\ \ a_2 = 2\ ,\ \ 3a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 0$$

解

…

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \iff x = \frac{1}{3}, 1$$

…

$$\begin{aligned} a_{n+2} - \frac{1}{3}a_{n+1} &= a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n \\ &= a_n - \frac{1}{3}a_{n-1} \\ &= \cdots\cdots \\ &= a_2 - \frac{1}{3}a_1 \\ &= 2 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

…

$$a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n = \frac{5}{3} \iff a_{n+1} - \frac{5}{2} = \frac{1}{3}\left(a_n - \frac{5}{2}\right)$$

ト こ $\left\{a_n-\frac{5}{2}\right\}$ な $a_1-\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}$ $\frac{1}{3}$ 、 ゆ

$$a_n-\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

ト こ み $\{a_n\}$ な

$$a_n=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{5}{2}\cdots\cdots(\quad)$$

⑩　連立漸化式

【連立漸化式】

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$$

【解法と解説】

〔解法１〕

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n & \cdots\cdots \quad ① \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n & \cdots\cdots \quad ② \end{cases}$$

$① + ② \times \alpha$

$$\begin{aligned} a_{n+1} + \alpha b_{n+1} &= (p + r\alpha)a_n + (q + s\alpha)b_n \\ &= (p + r\alpha)\left(a_n + \frac{q + s\alpha}{p + r\alpha}b_n\right) \end{aligned}$$

$\dfrac{q + s\alpha}{p + r\alpha} = \alpha$ で　α　に **❷ に帰着できる**

《係数が対称な時》

②

$$b_{n+1} = qa_n + pb_n \cdots\cdots ②'$$

で　①　4　p　q　4

$$\begin{aligned} ① + ②' \quad & a_{n+1} + b_{n+1} = (p + q)(a_n + b_n) \\ ① - ②' \quad & a_{n+1} - b_{n+1} = (p - q)(a_n - b_n) \end{aligned}$$

で **❷ に帰着できる**　$a_n + b_n$，$a_n - b_n$　み　に　a_n，b_n　み

4　で

〔解法２〕

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots\cdots = A^{n-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

で　A^{n-1}　　み　に　A^n　み

（ｉ）　A

（ii）

（iii）　$A^1, A^2, A^3, \cdots\cdots$　　A^n

例題１０

$\{a_n\}, \{b_n\}$

$$a_1 = b_1 = 1\ ,\ \begin{cases} a_{n+1} = 4a_n + 2b_n & \cdots\cdots\ ① \\ b_{n+1} = a_n + 3b_n & \cdots\cdots\ ② \end{cases}$$

解

$\dfrac{2+3\alpha}{4+\alpha} = \alpha$　　α　　$\alpha = 1, -2$ で　①, ②

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 5(a_n + b_n) \cdots\cdots ③$$

①＋②×(−2)

$$a_{n+1} - 2b_{n+1} = 2(a_n - 2b_n) \cdots\cdots ④$$

で　③, ④　　に

③,　　$\{a_n + b_n\}$　　$a_1 + b_1 = 2$,　5

$$a_n + b_n = 2 \cdot 5^{n-1} \cdots\cdots ⑤$$

④,　　$\{a_n - 2b_n\}$　　$a_1 - 2b_1 = -1$,　2

$$a_n - 2b_n = -2^{n-1} \cdots\cdots ⑥$$

⑤×2＋⑥

$$3a_n = 4 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1} \iff a_n = \frac{4 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}}{3}$$

⑤−⑥

$$3b_n = 2 \cdot 5^{n-1} + 2^{n-1} \iff b_n = \frac{2 \cdot 5^{n-1} + 2^{n-1}}{3}$$

$$a_n = \frac{4 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}}{3}\ ,\ b_n = \frac{2 \cdot 5^{n-1} + 2^{n-1}}{3} \cdots\cdots(\quad)$$

別解

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots\cdots = A^{n-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A^n A

$A^2 - 7A + 10E = O$

$x^2 - 7x + 10 = 0$ $x = 2,\ 5$ x^n $x^2 - 7x + 10$ $P(x)$ $ax + b$

$$x^n = (x^2 - 7x + 10)P(x) + ax + b$$

$x = 2$ $2^n = 2a + b$ $x = 5$ $5^n = 5a + b$ $a,\ b$

$$a = \frac{5^n - 2^n}{3}\ ,\ \ b = \frac{5 \cdot 2^n - 2 \cdot 5^n}{3}$$

$$\begin{aligned} A^n &= (A^2 - 7A + 10E)P(A) + aA + b \\ &= aA + b \quad (\because\ A^2 - 7A + 10E = O) \\ &= \begin{pmatrix} 4a + b & 2a \\ a & 3a + b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{2 \cdot 5^n + 2^n}{3} & \dfrac{2 \cdot 5^n - 2^{n+1}}{3} \\ \dfrac{5^n - 2^n}{3} & \dfrac{5^n + 2^{n+1}}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dfrac{2 \cdot 5^{n-1} + 2^{n-1}}{3} + \dfrac{2 \cdot 5^{n-1} - 2^n}{3} \\ \dfrac{5^{n-1} - 2^{n-1}}{3} + \dfrac{5^{n-1} + 2^n}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{4 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}}{3} \\ \dfrac{2 \cdot 5^{n-1} + 2^{n-1}}{3} \end{pmatrix} \cdots\cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

11　係数変化型

【係数変化型】

$$a_{n+1}=f(n)a_n$$

【解法と解説】

$a_n=f(n-1)a_{n-1}$ であるから以下これを繰り返して，

$$\begin{aligned} a_n &= f(n-1)\cdot f(n-2)a_{n-2} \\ &= f(n-1)\cdot f(n-2)\cdot f(n-3)a_{n-3} \\ &= \cdots\cdots \\ &= f(n-1)\cdot f(n-2)\cdot f(n-3)\cdot f(2)\cdot f(1)a_1 \end{aligned}$$

と処理して求めることができる．

なお，$na_{n+1}=(n+2)a_n$ のようなタイプでは，n から $n+2$ までの隣接した 3 整数の積 $n(n+1)(n+2)$ で割って処理してもよい．また，積の状態の漸化式であるから，両辺に対数をとって処理してもよい．

例題 １１

次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1=\frac{1}{2}\ ,\ (n-1)a_{n-1}=(n+1)a_n\ (n\geqq 2)$$

解

両辺に n を掛けて，辺々入れ替えると

$$\begin{aligned} n(n+1)a_n &= n(n-1)a_{n-1} \\ &= (n-1)(n-2)a_{n-2} \\ &= (n-2)(n-3)a_{n-3} \\ &= \cdots\cdots \\ &= 2\cdot 1\cdot a_1 \end{aligned}$$

よって，$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}\ (n\geqq 2)$……(答)

この他にも,**【解法と解説】**で上げた２通りの解法を示しておこう．

別解

両辺を $(n+1)$ でわると，

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n-1}{n+1}a_{n-1} \\
&= \frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}a_{n-2} \\
&= \frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}a_{n-3} \\
&= \cdots\cdots \\
&= \frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}a_{n-3}\cdots\cdots\frac{2}{4}\,\frac{1}{3}a_1 \\
&= \frac{2\cdot 1}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{n(n+1)}\ (n \geqq 2)\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

別解

両辺に底が 2 の対数をとって，

$$\log_2(n-1)+\log_2 a_{n-1} = \log_2(n+1)+\log_2 a_n$$

n に $n+1$ を代入して書き換えると，

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 a_n + \log_2\frac{n}{n+2}$$

したがって，$n \geqq 2$ に対して，

$$\begin{aligned}
\log_2 a_n &= \log_2 a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\log_2\frac{k}{k+2} \\
&= \log_2\frac{1}{2} + \log_2\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdots\cdots\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-1}{n+1}\right) \\
&= \log_2\frac{1}{2}\,\frac{2}{n(n+1)} \\
&= \log_2\frac{1}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

ゆえに，$a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ $(n \geqq 2)\cdots\cdots(\text{答})$

⓬ 和・一般項混合型

【和・一般項混合型】

$$S_n = pa_n + q\ (p \neq 1)$$

【解法と解説】

$S_{n+1} = pa_{n+1} + q$ であるからこれと与えられた漸化式の辺々を引くと，

$$S_{n+1} - S_n = p(a_{n+1} - a_n)$$

となる．ここで，$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ であるから，

$$a_{n+1} = p(a_{n+1} - a_n) \iff a_{n+1} = \frac{p}{p-1}a_n\ (\because\ p \neq 1)$$

となり，**❷ に帰着できる．**

このようなタイプに関わらず S_n と a_n の混合型は $S_n - S_{n-1} = a_n\ (n \geqq 2)$ という式を上手く使うことでこれまでのタイプのいずれかに帰着する場合がある．

なお，$S_1 = a_1$ であることから，a_1 の値は与えられていないこともある．

✎**注**：$S_1 = a_1$ であることを確認する．

例題 １２

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n で表すとき，次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$S_n = 2a_n - 1$$

解

$S_{n+1} = 2a_{n+1} + 1$ であるから，これと与えられた漸化式の辺々引いて

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= 2a_{n+1} - 2a_n \\ a_{n+1} &= 2a_{n+1} - 2a_n \\ a_{n+1} &= 2a_n \end{aligned}$$

また，$a_1 = S_1$ であることから，

$$S_1 = 2a_1 - 1 \iff a_1 = 2a_1 - 1 \iff a_1 = 1$$

よって，数列 $\{a_n\}$ は初項１，公比２の等比数列であるから，

$$a_n = 2^{n-1} \cdots\cdots (答)$$

参考　フィボナッチ数列

【フィボナッチ数列】

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

【自然界に現れる数列】

この数列は自然界によく現れることで有名な数列である．前の２項の和が次の項の値になることを示しているため，一般項は常に整数値をとる．この漸化式をみたす数列の一般項は，

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

となる．ここで，注目したいのは一般項は常に整数値をとるのにもかかわらず，一般項には無理数を含んでいるという点である．ちなみに，これは隣接３項間の漸化式であるから，

9 でこの一般項を導き出すことは可能である．余裕があれば求めてみてはどうだろうか？

この数列を実際に並べてかくと次のようになる．

1　1　2　3　5　8　13　21　34　55　89　144　233　……

漸化式の定義通りに数字を書いていくとこのようになる．これらの数字は，**フィボナッチ数**と呼ばれる．

ひまわりの種の配列をよく観察してみよう！左回りの螺旋と右回りの螺旋が見えてくるはずである．あるひまわりの種の配置を実際に数えると次のような結果が得られた．

$$\left.\begin{array}{lll} \text{右回り} & \cdots\cdots & 89\text{ 本} \\ \text{左回り} & \cdots\cdots & 144\text{ 本} \end{array}\right\}\cdots\cdots\ \text{合計 } 233\text{ 本}$$

これらの数字は，どれも上で並べたフィボナッチ数になっていることがわかる．
このほかにも自然界には，このフィボナッチ数が数多く現れる．

例：パイナップルの側面にある鱗片上の並び・松ぼっくりの種の配置等

このように，自然界にいろいろフィボナッチ数が出現するのは非常に興味深い．

◀頻出８形態問題演習▶

$\boxed{2}$ 標準（解 ☞$p.24$）

次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$（(6) は $\{b_n\}$ も）の一般項を求めよ.

(1) $a_1=9$， $a_{n+1}=9a_n^3$

(2) $a_1=1$， $a_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}a_n$

(3) $a_1=1$， $a_{n+1}=3a_n+2^n$

(4) $a_1=1$， $a_{n+1}=3a_n+2n-1$

(5) $a_1=1$， $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{4a_n+3}$

(6) $a_1=b_1=1$，

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n-2b_n \cdots\cdots ① \\ b_{n+1}=-a_n+3b_n \cdots\cdots ② \end{cases}$$

(7) $a_1=1$， $a_2=2$，

$a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0$

(8) $S_n=3a_n-2$

◀頻出８形態問題演習【解答】▶

【頻出８形態】

$\boxed{2}$

（1）　$a_n = 3^{(3^n - 1)}$

（2）　$a_n = \dfrac{1}{n}$

（3）　$a_n = 3^n - 2^n$

（4）　$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - n$

（5）　$a_n = \dfrac{1}{5 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1} - 4}$

（6）　$\begin{cases} a_n = \dfrac{-4^{n-1} + 4}{3} \\ b_n = \dfrac{4^{n-1} + 2}{3} \end{cases}$

（7）　$a_n = \dfrac{3^{n-1} + 1}{2}$

（8）　$a_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

確率漸化式【初級編】

確率漸化式の問題とは，ある試行を n 回行ったとき，ある事象が起こる確率を p_n とする．このとき，p_n と p_{n+1} の関係式を求めてから p_n を求めるような問題をいいます．隣接２項間漸化式や連立漸化式のようにやや複雑な式を立式して解かなければならないので，確率の知識だけでなく，数列の知識がかなり必要になるのです．よく出題される問題ではあるけれど，現役生の多くはやったことがないという声をよく聞きますので，この短期集中特訓を通してマスターしましょう！**【初級編】**では，単純な隣接２項間漸化式を立式して解く問題で立式の方法や仕組みを理解しましょう．

例題

袋の中に赤球 3 個と白球 6 個が入っている．袋から球を 1 個取り出し，取り出された赤球の個数を記録してから袋に戻す．この試行を n 回くり返したとき，記録された赤球の個数の合計が奇数である確率を p_n とする．このとき，次の問いに答えよ．

（1） p_1 を求めよ．

（2） p_{n+1} を p_n で表せ．

（3） p_n を求めよ．

まず始めにするべきことは，問題を丁寧に読んで理解することです．そして，必要ならば簡単な図をかくことを心がけましょう！問題が把握できていないあるいは勘違いをしていたでは問題外です．では早速順番に解いてみましょう．

♣ ♠

解答 と **解説**

（1） 記号の意味をしっかり理解できていますか？ p_1 は

1 回の試行で赤球が 1 個取り出される確率

を表すんですよね．ですから，

$$p_1 = \frac{3}{9} = \boldsymbol{\frac{1}{3}} \cdots\cdots(\text{答})$$

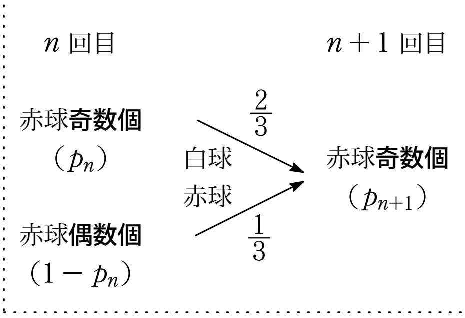
となります．ここまでは問題ないでしょう．

（2） さて，ここからが本番です．『 p_n と p_{n+1} の関係式を求めなさい』ということなので，漸化式を立式しなければいけません．大切なことは，

n 回目の試行が終わった時点で起こりうるすべての場合と確率を書き出す

ことです．本問の場合は，n 回目の試行が終わった時点で赤球の個数は奇数個か偶数個かのいずれかしかありません．n 回目の試行が終わった時点で赤球の個数が奇数個である確率が p_n なのですから，偶数個である確率は $1 - p_n$ ですね．ではこの 2 通りの場合において，$n+1$ 回目の試行が終わった時点で赤球が奇数個である場合を考えましょう．次のような図をかくと理解しやすいでしょう．

n 回目に赤球が奇数個であれば $n+1$ 回目に赤球が奇数個であるためには白球が出なければいけません．また，n 回目に赤球が偶数個であれば $n+1$ 回目に赤球が奇数個であるためには赤球が出なければいけません．つまり，$n+1$ 回目に赤球が奇数個である確率は，和の法則から次のようになります．



$$p_{n+1} = \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{白球}}\cdot p_n + \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{赤球}}\cdot(1-p_n)$$

$$\iff \quad \boldsymbol{p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

これで，p_{n+1} と p_n の関係式が得られました．あとは (3) でこれを解けばよいので，ここからは隣接２項間漸化式を解く問題になります．

(3)　(2) で得られた漸化式を変形すると，

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3} \quad \iff \quad p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$$

となるので，数列 $\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ は初項 $p_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列である．よって，

$$p_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \iff \quad \boldsymbol{p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

答えが求まったら，$n=1,\ 2$ の場合を計算して検算しましょう．もちろん解答に書く必要はありません．しかし，$n=1,\ 2$ の場合が間違っていた場合，答えは当然違うのですから，見直しをする必要があります．漸化式の立式が間違っていたのか？漸化式を解くときに間違えたのか？いずれにしても大きなダメージです．数列は特に検算しやすい分野ですので，検算する癖をつけておいてください．

◇ ——— ♡

この **例題** は，確率漸化式の基本ですからまずはこれをしっかりと理解してください．これが理解できた人は，実際に自分で確率漸化式を立式してみましょう．基本的なものを 2 題用意しましたので，実際に解いてみてください．解答の書き方がよくわからないという人もいると思いますので，次の問題の解答を参考にしてください．

◀類題演習▶

1 （'07　北九州市立大・改）　解答 ☞ p.4

袋 A の中に白玉 9 個と赤玉 1 個が入っており，袋 B の中に白玉 8 個が入っている．袋 A ，袋 B からそれぞれ 2 個の玉を取り出し，それらを互いに入れかえる操作 S を考える．操作 S を n 回行った後，袋 A に赤玉が入っている確率を p_n とする．以下の問いに答えよ．

（1）　p_1 を求めよ．

（2）　p_{n+1} を p_n で表せ．

（3）　p_n を求めよ．

2 （'02　新潟大）　解答 ☞ p.5

袋の中に赤球 4 個と白球 6 個が入っている．3 個を同時に袋から取り出し，取り出された赤球の個数を記録してから袋に戻す．この試行を n 回くり返したとき，記録された赤球の個数の合計が奇数である確率を p_n とする．このとき，次の問いに答えよ．

（1）　p_1 を求めよ．

（2）　p_{n+1} を p_n で表せ．

（3）　p_n を求めよ．

1 解答 と 解説

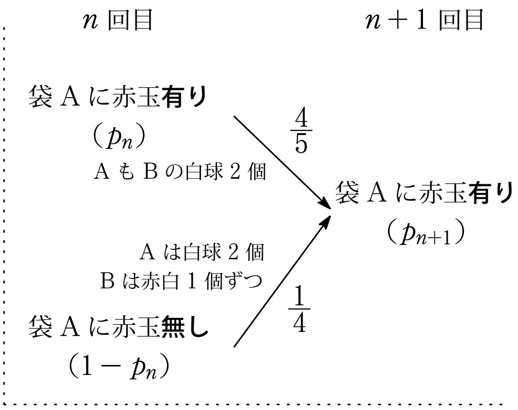
(1)　1 回の操作で袋 A に赤玉があるためには，袋 A, B から白玉をそれぞれ 2 個取り出せばよいので，

$$p_1 = \underbrace{\frac{{}_9C_2}{{}_{10}C_2}}_{\text{A から白 2}} \times \underbrace{\frac{{}_8C_2}{{}_8C_2}}_{\text{B から白 2}} = \boldsymbol{\frac{4}{5}} \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　n 回目の操作で，袋 A に赤玉があるとき，$n+1$ 回目の操作で袋 A に赤玉があるための確率は，(1) から

$$p_n \times p_1 = \frac{4}{5}p_n$$

また，n 回目の操作で，袋 A に赤玉がないとき，袋 A には白玉が 10 個，袋 B には白玉 7 個，赤玉 1 個が入っている状態である．このときの確率は，余事象の確率から $1-p_n$ となる．$n+1$ 回目の操作で袋 A に赤玉があるためには，袋 A から白玉 2 個，袋 B から白玉 1 個，赤玉 1 個を取り出せばよいので，



$$(1-p_n) \times \underbrace{\frac{{}_{10}C_2}{{}_{10}C_2}}_{\text{A から白 2}} \times \underbrace{\frac{{}_7C_1 \times {}_1C_1}{{}_8C_2}}_{\text{B から白 1 赤 1}} = \frac{1}{4}(1-p_n)$$

ゆえに，$n+1$ 回の操作で袋 A に赤玉が入ってる確率 p_{n+1} は，

$$p_{n+1} = \frac{4}{5}p_n + \frac{1}{4}(1-p_n) \iff \boldsymbol{p_{n+1} = \frac{11}{20}p_n + \frac{1}{4}} \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　(2) で求めた漸化式を変形すると，

$$p_{n+1} = \frac{11}{20}p_n + \frac{1}{4} \iff p_{n+1} - \frac{5}{9} = \frac{11}{20}\left(p_n - \frac{5}{9}\right)$$

となるので，数列 $\left\{p_n - \frac{5}{9}\right\}$ は，初項 $p_1 - \frac{5}{9} = \frac{11}{45}$，公比 $\frac{11}{20}$ の等比数列であるから，

$$p_n - \frac{5}{9} = \frac{11}{45}\left(\frac{11}{20}\right)^{n-1} = \frac{4}{9}\left(\frac{11}{20}\right)^n$$

ゆえに，$\boldsymbol{p_n = \frac{5}{9} + \frac{4}{9}\left(\frac{11}{20}\right)^n} \cdots\cdots(\text{答})$

♣ ◇ ♠ ♡

解説

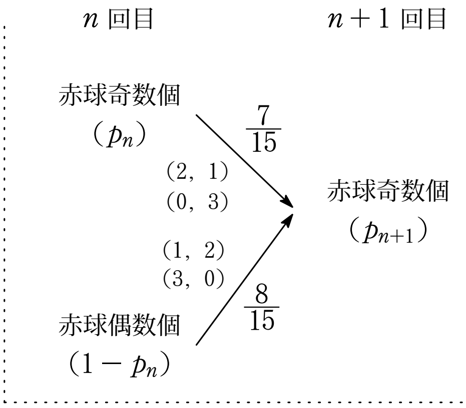
2 つの玉を取り出すので注意しながら計算しないといけません．図をかけば，例題 と同じ仕組みであることがわかるはずです．

2 解答 と 解説

(1)　1 回の操作で取り出された赤球の個数が奇数個となるのは，（赤球の個数，白球の個数）として表すと，$(1, 2), (3, 0)$ の 2 通りがあるので，求める確率は，

$$p_1 = \underbrace{\frac{{}_4\mathrm{C}_1 \times {}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}}_{(1,2)} + \underbrace{\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}}_{(3,0)} = \boldsymbol{\frac{8}{15}} \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　n 回の操作で取り出された赤球が偶数個である確率は，$1 - p_n$ である．



（ｉ）　n 回の操作で取り出された赤球の個数が奇数個であるとき，$n+1$ 回目の操作で

Ⓐ　$(2, 1)$　　　Ⓑ　$(0, 3)$

となればよいので，その確率は，

$$p_n \times \left(\underbrace{\frac{{}_4\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}}_{(2,1)} + \underbrace{\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}}_{(0,3)} \right) = \frac{7}{15} p_n$$

（ii）　n 回の操作で取り出された赤球の個数が偶数個であるとき，$n+1$ 回目の操作で

Ⓒ　$(1, 2)$　　　Ⓓ　$(3, 0)$

となればよいので，その確率は，(1) を利用して，

$$(1 - p_n) \times p_1 = \frac{8}{15}(1 - p_n)$$

ゆえに，$n+1$ 回の操作で赤球が奇数個取り出される確率 p_{n+1} は，

$$p_{n+1} = \frac{7}{15} p_n + \frac{8}{15}(1 - p_n) \iff \boldsymbol{p_{n+1} = -\frac{1}{15} p_n + \frac{8}{15}} \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　(2) で求めた漸化式を変形すると，

$$p_{n+1} = -\frac{1}{15} p_n + \frac{8}{15} \iff p_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{15}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$$

となるので，数列 $\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ は，初項 $p_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{30}$，公比 $-\frac{1}{15}$ の等比数列であるから，

$$p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{30}\left(-\frac{1}{15}\right)^{n-1} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{15}\right)^n$$

ゆえに，$\boldsymbol{p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{15}\right)^n} \cdots\cdots(\text{答})$

―――――― ♣ ―――――― ♢ ―――――― ♠ ―――――― ♡ ――――――

解説

今度は，3 つの玉を取り出すので **1** よりやや複雑になっています．取り出す場合をもらさないように注意しなくてはいけません．

さて，例題とその類題演習では玉を取り出す問題を扱いました．その他にも様々なシチュエーションで漸化式を求める問題がありますので，問題をじっくりと理解して解いてみてください．**3** **4** は四面体の頂点上を動く点について，**5** は 2 つの物質変化についての問題です．もちろん考え方はこれまでとまったく同じです．

3 （’04　岡山理科大）　解答 ☞ p.7

正四面体のある頂点に 1 匹のアリがいる．このアリは 1 分間たつごとに他の頂点へそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で移動する．n 分後に，初めにいた頂点にアリがいる確率を p_n とするとき，次の設問に答えよ．

（1）　p_2, p_3 を求めよ．

（2）　p_{n+1} を p_n を用いて表せ．

（3）　p_n を求めよ．

4 （’06　山口大）　解答 ☞ p.8

四面体 $A_1A_2A_3A_4$ の頂点から頂点に動く点 Q がある．1 つのさいころを投げ，出た目に応じて Q は次のルールにしたがって動く．

ルール：　さいころを投げる前，Q は A_k にあるとする．さいころを投げたとき，出た目 l が k, 5, 6 のいずれにも等しくなければ Q は A_l に動き，l が k, 5, 6 のいずれかに等しければ Q は A_k にとどまる．

最初 Q は A_1 にあるとする．さいころを n 回投げたとき，Q が A_1 にある確率を p_n とする．このとき次の問いに答えよ．

（1）　p_1, p_2 を求めよ．

（2）　p_{n+1} を p_n の式で表せ．

（3）　p_n を求めよ．

5 （’05　東京薬科大・改）　解答 ☞ p.9

2 つの状態 X か Y をとる物質について，
X から 1 分後に Y になっている確率が $\frac{1}{5}$ で，Y から 1 分後に X になっている確率が $\frac{1}{10}$ である．この物質が，最初は X であるとして，n 分後に X である確率を a_n とおく．このとき次の問いに答えよ．

（1）　a_1, a_2 を求めよ．

（2）　$n \geqq 2$ のとき，a_n を a_{n-1} を用いて表せ．

（3）　a_n を求めよ．

3 解答 と 解説

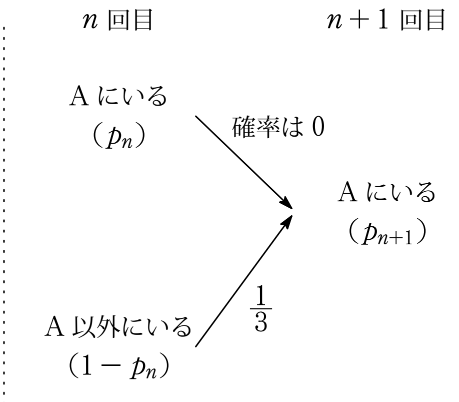
(1)　はじめにアリがいる頂点を A とする．2 分後に A にいるためには，はじめの移動はどこの頂点へ行ってもよく，次の移動で A に行けばよいので，

$$p_2 = \underbrace{1}_{1\text{ 分後}} \times \underbrace{\frac{1}{3}}_{2\text{ 分後}} = \boldsymbol{\frac{1}{3}} \cdots\cdots (\text{答})$$

2 分後に A にいると 3 分後に A にいることはないので，2 分後に A にいないときを考える．その確率は，$1 - p_2 = \dfrac{2}{3}$ である．次の 1 分で A に移動すればよいので，

$$p_3 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{9}} \cdots\cdots (\text{答})$$

(2)　n 分後にアリが A にいた場合，次の 1 分後に A にいることはない．n 分後にアリが A 以外の頂点にいる確率は $1 - p_n$ であり，次の移動で A に行けばよいので，



$$p_{n+1} = 0 \times p_n + \frac{1}{3}(1 - p_n)$$
$$\iff \quad \boldsymbol{p_{n+1} = -\frac{1}{3} p_n + \frac{1}{3}} \cdots\cdots (\text{答})$$

(3)　(2) で求めた漸化式を変形すると，

$$p_{n+1} = -\frac{1}{3} p_n + \frac{1}{3}$$
$$\iff \quad p_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$$

となるので，数列 $\left\{p_n - \dfrac{1}{4}\right\}$ は，初項 $p_1 - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{4}$，公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから，

$$p_n - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

ゆえに，$\boldsymbol{p_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}} \cdots\cdots (\text{答})$

♣　♢　♠　♡

解説

$p_1 = 0$ であることに注意しましょう．1 分後にはアリは必ず他の頂点に移動するので，1 分後に同じ頂点にいる確率は 0 です．漸化式を立式するときは，このことに注意しなければいけません．

4 解答 と 解説

(1)　Q がその場にとどまる確率は，題意から $\frac{1}{2}$ であり，他のある頂点へ移動する確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$ である．1 回の移動で Q が A_1 にいるためには，さいころの目が 1, 5, 6 であればよいので，

$$p_1 = \frac{3}{6} = \mathbf{\frac{1}{2}} \cdots\cdots(\text{答})$$

2 回の移動で Q が A_1 にいるためには，

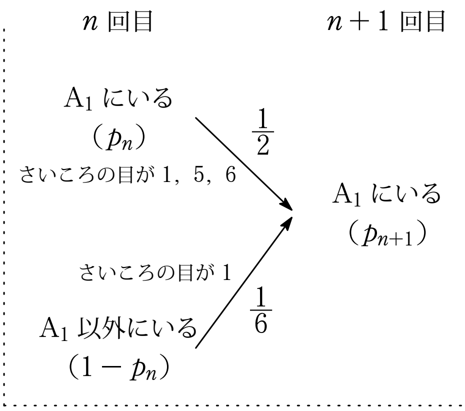
1 回目に A_1 以外の点に移動して，2 回目に A_1 に移動する　……　$\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$

1 回目，2 回目ともに A_1 にいる　……　$\left(\frac{1}{2}\right)^2$

のいずれかであるから，

$$p_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{\frac{1}{3}} \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　n 回目の移動後 Q が A_1 にいるとき $n+1$ 回目の移動で A_1 にいるためには，その場にとどまればよく．n 回目の移動後 A_1 以外の頂点にいるときは，$n+1$ 回目にさいころを振って 1 が出ればよいので，



$$p_{n+1} = \frac{1}{2} \times p_n + \frac{1}{6}(1-p_n)$$

$$\iff \quad \boldsymbol{p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}} \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　(2) で求めた漸化式を変形すると，

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}$$

$$\iff \quad p_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$$

となるので，数列 $\left\{p_n - \frac{1}{4}\right\}$ は，初項 $p_1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから，

$$p_n - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

ゆえに，$\boldsymbol{p_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}} \cdots\cdots(\text{答})$

♣　◇　♠　♡

解説

移動のルールが少し複雑ですから，まずは問題を正しく理解することから始めなければいけません．あとは，自分なりにわかりやすいような図をかいたりするとよいでしょう．とどまる確率と，ある特定の頂点へ移動する確率が求められれば見通しが立つはずです．

5 解答 と 解説

（1）　1 分後に X になる確率は，余事象の確率から

$$a_1 = 1 - \frac{1}{5} = \mathbf{\frac{4}{5}} \cdots\cdots(\text{答})$$

2 分後に X になるのは，

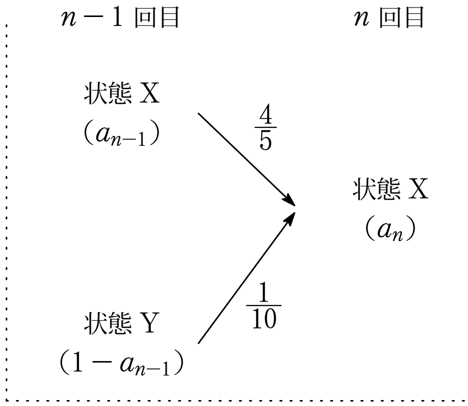
1 分後に Y になって，さらにその 1 分後に X になる　……　$\dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{10}$

1 分後，2 分後ともに X のまま　……　$\left(\dfrac{4}{5}\right)^2$

のいずれかであるから，

$$a_2 = \frac{1}{5} \times \frac{1}{10} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \mathbf{\frac{33}{50}} \cdots\cdots(\text{答})$$

（2）　$n-1$ 分後は X か Y のいずれかである．
$n-1$ 分後に X であるとき，その 1 分後に X である確率は，$\dfrac{4}{5}$ であり，$n-1$ 分後に Y であるとき，その 1 分後に X になる確率は $\dfrac{1}{10}$ であるから，



$$a_n = \frac{4}{5} \times a_{n-1} + \frac{1}{10}(1 - a_{n-1})$$

$$\iff \quad \boldsymbol{a_n = \frac{7}{10}a_{n-1} + \frac{1}{10}\ (n \geqq 2)} \cdots\cdots(\text{答})$$

（3）（2）で求めた漸化式を変形すると，

$$a_n = \frac{7}{10}a_{n-1} + \frac{1}{10}$$

$$\iff \quad a_n - \frac{1}{3} = \frac{7}{10}\left(a_{n-1} - \frac{1}{3}\right)$$

となるので，数列 $\left\{a_{n-1} - \dfrac{1}{3}\right\}$ は，第 2 項以降は，初項 $a_1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{15}$，公比 $\dfrac{7}{10}$ の等比数列であるから，

$$a_{n-1} - \frac{1}{3} = \frac{7}{15}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-2} \quad \iff \quad a_{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}$$

ゆえに，$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^n} \cdots\cdots(\text{答})$

♣　♢　♠　♡

解説

確率漸化式の立式にも随分慣れてきたでしょうから，立式は結構すんなりできたはずです．ただし，今度は漸化式を解く段階で気をつけなければいけません．(2) で求めた隣接 2 項間漸化式は，$n \geqq 2$ で成り立っているものなので，(3) で解くときにいつもと若干ズレが生じてきます．そこに注意を払いながら解きましょう．また，答えが出たら，$n = 1, 2$ で成り立つことかどうかを確認することも忘れないでください．

これで**【初級編】**は終わりです．どうでしょうか？確率漸化式を立式する仕組みは理解できたでしょうか？これがしっかりとできるようになった人は次の**【中級編】**へ進んでください．今度は，もう少し複雑な確率漸化式が登場します．

確率漸化式【中級編】

【初級編】がマスターできた人は，中級編を攻略していきましょう．ここで扱う主な問題は，連立漸化式が出てくるタイプの問題です．したがって，連立漸化式の解法がまだマスターできていない人は，**漸化式の解法【中級編】**を先にやってください．

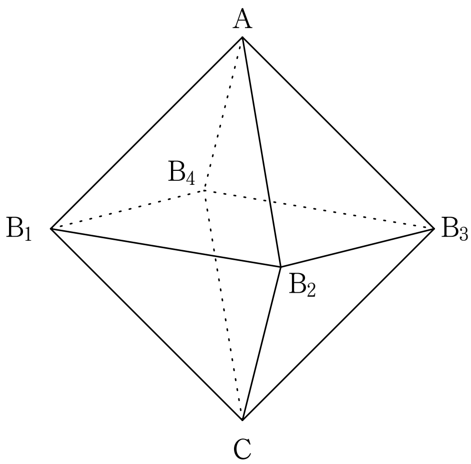
【初級編】と違って，問題が格段に複雑になるので，問題を熟読して内容の理解に努めてください．そして，問題に書かれている規則や法則がきちんと理解できたら問題に取りかかりましょう．では，まずは例題から…

例題　（'06　札幌医科大・設問を一部削除）

右図の正八面体 $AB_1B_2B_3B_4C$ の頂点 A を出発し，1 回ごとに等確率で隣の頂点のいずれかに移動する点 X がある．

例えば n 回目の移動後に点 X が頂点 B_1 にいたとすると $n+1$ 回目には頂点 A, B_2, B_4, C のいずれかに，それぞれ $\frac{1}{4}$ の確率で移動する．

n 回目の移動後に，点 X が頂点 A にいる確率を a_n，頂点 B_1, B_2, B_3, B_4 のいずれかにいる確率を b_n，頂点 C にいる確率を c_n とする $(n \geqq 1)$．



（1）　a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} を a_n, b_n, c_n を用いて，それぞれ表せ．

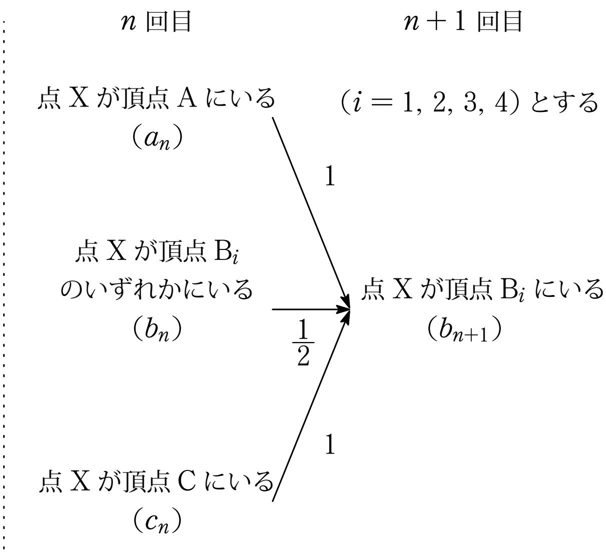
（2）　b_n を n の式で表せ．

問題をみると，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の 3 つの数列があることがわかります．つまり，連立漸化式を立式しなければいけません．その手順は**【初級編】**でやったこととまったく同じです．では，解説していきましょう．

解答 と **解説**

（1）　規則が少々ややこしいので，しっかりと問題を読んで理解出来たでしょうか？（1）ではいきなり漸化式を立式しなさいということなので，また**【初級編】**と同様に図をかいて考えてみましょう．

A, C に関しては単純なので，B のときの図を右のようにかきました．では，解答です．



$n+1$ 回目に 頂点 A に行くためには，n 回目には B_i $(i=1, 2, 3, 4)$ のいずれかにいなければならないので，

$$\boldsymbol{a_{n+1} = \frac{1}{4} b_n} \cdots\cdots(\text{答})$$

である．頂点 C に関しても同様であるから，

$$\boldsymbol{c_{n+1} = \frac{1}{4} b_n} \cdots\cdots(\text{答})$$

である．次に頂点 B_i については，n 回目に頂点 A

または C にいれば $n+1$ 回目は必ず頂点 B_i にいるので，移動の確率は 1 であり，n 回目に頂点 B_i のいずれかにいれば $n+1$ 回目に頂点 B_i にいる確率は $\frac{1}{2}$ となることから，

$$\boldsymbol{b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) (1) では連立漸化式を立式しましたが，その初項は求めていませんからこれでは解けません．問題では問われていませんが，自分で初項を求めることが必要になります．

始め点 X は頂点 A にいるので，1 回の移動では必ず頂点 B_i にいる．よって，

$$a_1 = 0,\ b_1 = 1,\ c_1 = 0,\ a_2 = \frac{1}{4},\ b_2 = \frac{1}{2},\ c_2 = \frac{1}{4} \quad \cdots\cdots①$$

また，(1) の結果から，$a_n = c_n$ であることがわかる．(1) で求めた漸化式から，

$$b_{n+2} = a_{n+1} + \frac{1}{2}b_{n+1} + c_{n+1} = 2\cdot\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}b_{n+1} \quad\Longleftrightarrow\quad b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n$$

が得られる．

これは隣接３項間漸化式ですね！特性方程式を駆使して解きましょう！

$$\begin{aligned} b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n \iff b_{n+2} + \frac{1}{2}b_{n+1} &= b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n \\ &= b_n + \frac{1}{2}b_{n-1} \\ &= \cdots\cdots \\ &= b_2 + \frac{1}{2}b_1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 1 \quad (\because ①) \\ &= 1 \end{aligned}$$

ゆえに，

$$b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad b_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(b_n - \frac{2}{3}\right)$$

と式変形できるので，数列 $\left\{b_n - \frac{2}{3}\right\}$ は，初項 $b_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから，

$$b_n - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad\Longleftrightarrow\quad \boldsymbol{b_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}\cdots\cdots(\text{答})$$

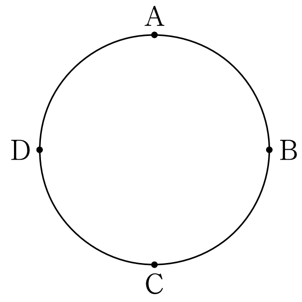
◇ ♡

このような問題は，連立漸化式の立式はそれほど難しくなくそれを解く方が難しいことが多々あります．したがって，数列の漸化式がしっかりと解けるようになっておくことが必要なのです．

◀類題演習▶

6 （'05　京都府立大・問題文の文字を変更）　解答 ☞ p.13

右の図のように円周上の 4 点 A, B, C, D の上を次の規則で移動する点 Q を考える．さいころを振って，1 の目が出れば時計の針の回転と同じ向きに隣の点に移動し，2 の目が出れば時計の針の回転と逆向きに隣の点に移動する．また，3, 4, 5, 6 の目が出れば移動しない．Q は最初 A にあったものとする．さいころを n 回振った後で Q が A, B, C, D 上にある確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n, d_n とおく．



（1）　a_1, a_2 を求めよ．

（2）　$a_{n+1}+c_{n+1}$ と a_n+c_n との間に成り立つ関係式を求めよ．

（3）　a_n を n の式で表せ．

7 （'07　東京工科大・穴埋め問題を記述式問題に変更）　解答 ☞ p.15

袋 A には赤玉のみ 2 個，袋 B には青玉のみ 3 個入っている．いま，

「A から玉を 1 個取り出しそれを B に入れ，次いで B から玉を 1 個取り出しそれを A にいれる」

という試行を行う．この試行を n 回（$n=1, 2, 3, \cdots$）行ったとき，A に赤玉のみ 2 個入っている確率を p_n，A に赤玉と青玉が 1 個ずつ入っている確率を q_n，A に赤玉が 1 個も入っていない確率を r_n とする．

（1）　p_1, q_1, r_1 を求めよ．

（2）　p_{n+1}, q_{n+1} をそれぞれ p_n, q_n を用いて表せ．

（3）　p_n を求めよ．

次の **8** は確率の問題ではありませんが，漸化式を立式して解いていくという考え方が同じなので挙げておきます．

8 （'06　九州工業大・設問を一部省略）　解答 ☞ p.17

赤玉は，装置 M の中では，1 分経過後に 2 個の白玉に変化する．白玉は，装置 M の中では，1 分経過後に 1 個の赤玉と 1 個の白玉に変化する．時刻 $t=1$（分）に装置 M へ赤玉を 1 個入れ，以降，1 分経過ごとに装置 M へ赤玉を 1 個追加する．時刻 $t=n$（分）における装置 M 中の赤玉と白玉の個数をそれぞれ a_n と b_n（$n=1, 2, \cdots$）とする．このとき，時刻 $t=3$（分）までの赤玉と白玉の個数は，$a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=3$, $b_1=0$, $b_2=2$, $b_3=4$ となる．以下に答えよ．

（1）　a_{n+1} を b_n を用いて表し，b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ．

（2）　a_{n+2}, a_{n+1}, a_n（$n=1, 2, \cdots$）がみたす関係式を求めよ．

（3）　数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

6 解答 と 解説

さいころを 1 回振ったとき，1 の目が出る，2 の目が出る，3〜6 の目が出る事象をそれぞれ X, Y, Z とすると，X, Y, Z が起こる確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{2}{3}$ である．

(1) さいころを 1 回振って A にいるためには Z が 1 回起こればよいので，$a_1=\frac{4}{6}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$……(答)

また，さいころを 2 回振って A にいるためには

Z が 2 回連続で起こる，または，X, Y が 1 回ずつ起こる

のいずれかであるから，

$$a_2=\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}+2\times\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{18}{36}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\text{……(答)}$$

(2) $n+1$ 回目に A にいるためには，

n 回目に D にいて，X が起こる．
n 回目に B にいて，Y が起こる．
n 回目に A にいて，Z が起こる．

のいずれかである．よって，

$$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{6}b_n+\frac{1}{6}d_n \quad \text{……①}$$

が成り立つ．同様にすると，

$$c_{n+1}=\frac{2}{3}c_n+\frac{1}{6}b_n+\frac{1}{6}d_n \quad \text{……②}$$

が成り立つ．ここで，点 Q は必ず 4 点 A, B, C, D のいずれかにあるから，

$$a_n+b_n+c_n+d_n=1 \iff b_n+d_n=1-(a_n+c_n)\text{……③}$$

である．① + ② より，

$$\begin{aligned}a_{n+1}+c_{n+1} &= \frac{2}{3}(a_n+c_n)+\frac{1}{3}(b_n+d_n)\\ &= \frac{2}{3}(a_n+c_n)+\frac{1}{3}\{1-(a_n+c_n)\} \quad (\because ③)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_{n+1}+c_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+c_n)+\frac{1}{3}}\text{……(答)}$$

(3) 題意より，$c_1=0$ である．(2) より，

$$a_{n+1}+c_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(a_n+c_n-\frac{1}{2}\right)$$

と変形できるので，数列 $\left\{a_n+c_n-\frac{1}{2}\right\}$ は，初項 $a_1+c_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから，

$$a_n+c_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \iff a_n+c_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad\text{……④}$$

となる．また，① − ② より，

$$\begin{aligned}a_{n+1}-c_{n+1} &= \frac{2}{3}(a_n-c_n)\\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^2(a_{n-1}-c_{n-1})\\ &= \cdots\cdots\\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n(a_1-c_1)\\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\\ \therefore\quad a_n-c_n &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad\text{……⑤}\end{aligned}$$

である．よって，④＋⑤ より，

$$2a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n} \cdots\cdots(\text{答})$$

———— ♣ ———— ♢ ———— ♠ ———— ♡ ————

解説

もう漸化式の立式にも随分慣れてきたと思うので，確率遷移図は省略しました．連立漸化式の解法が最大のポイントになることは言うまでもありませんが，本問では (2) で誘導されているので，比較的方針が立ちやすいのではないかと思います．(3) では (2) で求めたことを活かすため，$a_{n+1} - c_{n+1}$ と $a_n - c_n$ の関係式が必要になることを誘導なしに気付かなければいけません．連立方程式を解くときと同じような考え方を使います．
確率漸化式を解く上で次の式が成り立っていることに気付いたでしょうか？

$$a_n + b_n + c_n + d_n = 1$$

当たり前のようですが，この関係式に気付かなくて漸化式が解けないという声をよく聞きます．隠れた条件ですが，非常に大切な関係式です．いつもこのようになっているとは言えませんが，状況をよく判断してこの関係式を見つけてください．確率漸化式を解くにあたって最も重要な関係式と言っても過言ではないでしょう．

7 解答 と 解説

赤玉を●，青玉を○で表し，袋 A と袋 B の中の状態 P, Q, R を次のようにする．

P	Q	R
A ● ● B ○ ○ ○	A ● ○ B ● ○ ○	A ○ ○ B ● ● ○

(1)　始めは状態 P である．A から玉を 1 個 B へ移動させると，下図のような状態になるので，求める確率は，

A ●
B ● ○ ○ ○

$$\boldsymbol{p_1 = \frac{1}{4},\ q_1 = \frac{3}{4},\ r_1 = 0}\text{……(答)}$$

(2)　(1) より，題意の試行を 1 回行うと，

$$\mathrm{P}\to\mathrm{P}\ \text{の確率は，}\ \frac{1}{4}\ ,\ \ \mathrm{P}\to\mathrm{Q}\ \text{の確率は，}\ \frac{3}{4}$$

となることがわかる．また，Q の状態で玉を 1 個 A から B へ移すと，下図のいずれか一方の状態に $\frac{1}{2}$ の確率でなる．

A ●
B ● ○ ○ ○

A ○
B ● ● ○ ○

よって，

$$\mathrm{Q}\to\mathrm{P}\ \text{の確率は，}\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$\mathrm{Q}\to\mathrm{Q}\ \text{の確率は，}\ \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4} = \frac{5}{8}$$

である．さらに，R の状態で玉を 1 個 A から B へ移すと，下図のようになるので，

A ○
B ● ● ○ ○

$$\mathrm{R}\to\mathrm{Q}\ \text{の確率は，}\ \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

以上から，求める漸化式は，$p_n + q_n + r_n = 1$ を用いると，

$$p_{n+1} = p_n\cdot\frac{1}{4} + q_n\cdot\frac{1}{8} \iff \boldsymbol{p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{8}q_n}\text{……(答)}$$

$$q_{n+1} = p_n\cdot\frac{3}{4} + q_n\cdot\frac{5}{8} + r_n\cdot\frac{1}{2} \iff q_{n+1} = \frac{3}{4}p_n + \frac{5}{8}q_n + \frac{1}{2}(1 - p_n - q_n)$$

$$\iff \boldsymbol{q_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{8}q_n + \frac{1}{2}}\text{……(答)}$$

(3)　(2) の結果から，

$$q_{n+1} - p_{n+1} = \frac{1}{2} \iff q_n = p_n + \frac{1}{2}\ \text{（これは}\ n = 1\ \text{のときも成り立つ．）}$$

これを，$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{8}q_n$ へ代入すると，

$$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{8}\left(p_n + \frac{1}{2}\right) \iff p_{n+1} = \frac{3}{8}p_n + \frac{1}{16}$$

$$\iff p_{n+1} - \frac{1}{10} = \frac{3}{8}\left(p_n - \frac{1}{10}\right)$$

よって，数列 $\left\{p_n - \frac{1}{10}\right\}$ は初項 $p_1 - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}$ ，公比 $\frac{3}{8}$ の等比数列であるから，

$$p_n - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1} \iff \boldsymbol{p_n = \frac{1}{10} + \frac{2}{5}\left(\frac{3}{8}\right)^n}\text{……(答)}$$

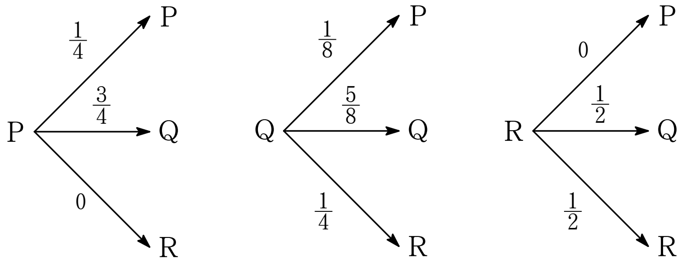
♣　◇　♠　♡

解説

問題を熟読して，ルールをしっかりと把握しましょう．ルールを勘違いすると，全滅しかねません．(1) では玉を入れ替えるわけではないので，

$$p_1 = 0,\ q_1 = 1,\ r_1 = 0$$

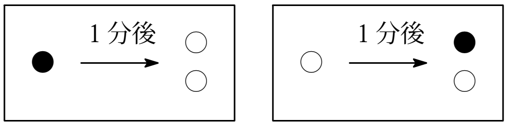
とはなりません．もちろん，(2) で漸化式を立式するときも同様です．このような問題で勘違いをしないためには，ゲームに参加しているつもりで玉を動かしてみることです．それだけでも随分ケアレスミスは防げるでしょう．
参考のため，1 回の試行によって状態がいくらの確率で変化するかを表す確率遷移図をかいておきます．



8 解答 と 解説

赤玉を●，白玉を○とすると，問題文から装置 M の中の玉の変化は下図のようになる．

装置 M　　　装置 M



(1)　n 分経過後，a_n 個の赤玉と b_n 個の白玉が入っていて，そこから 1 分経過すると，

a_n 個の赤玉は $2a_n$ 個の白玉に変化し，

b_n 個の白玉は b_n 個の赤玉と b_n 個の白玉に変化する．

赤玉が新たに 1 個追加されるので，求める漸化式は，

$$\boldsymbol{a_{n+1} = b_n + 1\ ,\ b_{n+1} = 2a_n + b_n}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$a_{n+1} = b_n + 1$ より，

$$b_n = a_{n+1} - 1\ ,\ b_{n+1} = a_{n+2} - 1$$

であるから，$b_{n+1} = 2a_n + b_n$ へ代入して，

$$a_{n+2} - 1 = 2a_n + a_{n+1} - 1 \iff \boldsymbol{a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0}\cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　(2) で求めた漸化式を変形すると，

$$a_{n+2} + a_{n+1} = 2(a_{n+1} + a_n) \quad \cdots\cdots ①$$
$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = -(a_{n+1} - 2a_n) \quad \cdots\cdots ②$$

となる．① より，

$$a_{n+1} + a_n = (a_2 + a_1)\cdot 2^{n-1} = 2^n \cdots\cdots ③ \quad (\because\ a_1 = a_2 = 1)$$

であり，② より，

$$a_{n+1} - 2a_n = (a_2 - 2a_1)\cdot(-1)^{n-1} = (-1)^n \cdots\cdots ④ \quad (\because\ a_1 = a_2 = 1)$$

であるから，③ − ④ より，

$$3a_n = 2^n - (-1)^n \iff \boldsymbol{a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}}\cdots\cdots(\text{答})$$

また，$b_n = a_{n+1} - 1$ より，

$$b_n = \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3} - 1 \iff \boldsymbol{b_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n - 3}{3}}\cdots\cdots(\text{答})$$

♣ ◇ ♠ ♡

解説

(3) で隣接３項間漸化式を解くことになります．最初の式変形は，特性方程式を用いて行っていますので，その方法がわからない場合は，漸化式の解法【中級編】を参照してください．

漸化式で表された数列の極限

漸化式で表された数列の極限を求める場合，その漸化式から一般項が求められれば特に問題はないでしょう．しかし，いつも一般項が求められるわけではないので，そのような場合はどのようにして極限を計算すればよいのでしょうか？ここでは，『解けない漸化式の極限』にテーマを絞って解説・演習をしていきましょう．

この類の問題は，難関といわれる大学や医学部などでよく見られます．このような問題を初見で解くことができる人はほとんどいないでしょう．すなわち，対策ができている人とできていない人で大幅に得点に影響されてしまうといっても過言ではありません．もちろん，初見でも丁寧な誘導がついていれば解けないわけではありませんが，対策をしておくことに越したことはありません．では，この問題を解くために必要な知識や考え方から始めていきましょう．

例題 （山形大）

n を自然数とする．数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = 1\ ,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{25x_n}\right)$$

で定義する．

（1） $x_n \geqq \dfrac{1}{5}$ を証明せよ．

（2） $x_{n+1} - \dfrac{1}{5} \leqq \dfrac{1}{2}\left(x_n - \dfrac{1}{5}\right)$ を証明せよ．

（3） $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

ここで与えられた数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めるのは困難です…．ところが，一般項が求められなくてもしかるべき手法を用いれば，その極限は求めることができます．本問はまさにその手法を誘導してくれているのです．このような問題は，様々な大学で出題されているため，数列の極限が頻出である大学・学部を受験する人は絶対にやっておかなければならない対策なのです．もちろん，難関大や医学部などではその誘導すらない所もあるので，誘導にしたがって断片的に解くのではなく問題の流れをしっかりと理解しながら解くことが非常に大切です．それでは，解説を交えながら解答していきましょう．

♣ ♠

解答 と **解説**

（1） **方針** 自然数 n に関する証明をするのですから，数学的帰納法を用います．

【証明】

（ｉ） $n=1$ のとき，$x_1 = 1$ より $x_1 \geqq \dfrac{1}{5}$ が成立する．

（ii） $n=k$ のとき，$x_k \geqq \dfrac{1}{5}$ が成り立つと仮定する．ここで，

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \frac{1}{5} &= \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{1}{25x_k}\right) - \frac{1}{5} \quad \text{☜ 与えられた漸化式を利用する．} \\ &= \frac{1}{50x_k}(25x_k^2 + 1 - 10x_k) \\ &= \frac{1}{50x_k}(5x_k - 1)^2 \end{aligned}$$

ゆえに，$x_k \geqq \dfrac{1}{5}$ のとき，$x_{k+1} - \dfrac{1}{5} \geqq 0$ が成り立つ．

したがって，(ｉ), (ii) よりすべての自然数 n に対して $x_n \geqq \dfrac{1}{5}$ であることが示された．(証明終)……(答)

(2) $\boxed{\text{方針}}$ 基本にしたがって (右辺) − (左辺) $\geqq 0$ を示します．

【証明】

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) - (\text{左辺}) &= \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{1}{5}\right) - \left(x_{n+1} - \frac{1}{5}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{25x_n}\right) + \frac{1}{5} \\
&= \frac{1}{10} - \frac{1}{50x_n} \\
&= \frac{5x_n - 1}{50x_n} \geqq 0 \quad \left(\because\ x_n \geqq \frac{1}{5}\right)
\end{aligned}$$

したがって，

$$\frac{1}{2}\left(x_n - \frac{1}{5}\right) - \left(x_{n+1} - \frac{1}{5}\right) \geqq 0 \iff x_{n+1} - \frac{1}{5} \leqq \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{1}{5}\right)$$

より，題意は示された．(証明終)……(答)

(3) $\boxed{\text{方針}}$ (1), (2) の結果と，はさみうちの原理を利用します．

(1), (2) より，

$$0 \leqq x_{n+1} - \frac{1}{5} \leqq \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{1}{5}\right)$$

が成り立つので，この関係を繰り返し用いると，

$$\left.\begin{aligned}
0 \leqq x_n - \frac{1}{5} &\leqq \frac{1}{2}\left(x_{n-1} - \frac{1}{5}\right) \\
&\leqq \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(x_{n-2} - \frac{1}{5}\right) \\
&\leqq \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(x_{n-3} - \frac{1}{5}\right) \\
&\leqq \cdots\cdots \\
&\leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(x_1 - \frac{1}{5}\right)
\end{aligned}\right\}$$

ここの計算が苦手という人がよくいますが次のように考えます．
各行にある $\dfrac{1}{2}$ の指数部分と x の添え字に注目すると，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\bigcirc} \text{ と } x_{n-\bigcirc}$$

のように，なっていることがわかります．
式を追っていくと，$\dfrac{1}{2}$ は一つずつ増え x の添え字は一つずつ減っていくので，和が常に一定になっているということがわかります．
ここまで発見できれば，最後の式で x_1 となるときの $\dfrac{1}{2}$ の指数部分の数が計算できるというわけです．

ここで，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(x_1 - \frac{1}{5}\right) = 0$$

であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n - \frac{1}{5}\right) = 0 \iff \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{5}} \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

◇ ♡

漸化式が与えられている場合，証明をするときは数学的帰納法を用いるとうまくいくことが多々あります．式変形を見てもわかるように，証明の途中で与えられた漸化式を用いることができるため，スムーズに計算が進むことが多いからです．(3) では，式変形に慣れておく必要はありますが，解答の方針が立てられていればそれほど難しい計算をしているわけではないことが理解できるでしょう．

この問題を通して次のことを学びましょう．

（ｉ） 漸化式が解けないときは，与えられた数列の一般項がとることのできる値を絞る．

（ii） 最終的には，はさみうちの原理を利用して極限を求める．

（iii） そのために，はさみうちの原理が利用できるような不等式を導く必要がある．

（ｉ）は必ずしも必要ではありません．直接不等式を導いて，はさみうちの原理へという流れの問題もあります．ここまでで，おおまかな流れがつかめたでしょうか？一つ類題演習をしてみましょう．

◀類題演習▶

1 n を自然数とする．数列 $\{x_n\}$ を $x_1 = 1$，$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$ で定義する．

(1) $1 \leqq x_n < 2$ を証明せよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

方針　先ほどの 例題 の (2) に相当する部分の設問を削除してみました．はさみうちの原理を見据えた不等式を見つけてきましょう．

♣　♠

解答 と 解説

(1) 【証明】

（ｉ） $n = 1$ のとき，$x_1 = 1$ であるから，$1 \leqq x_1 < 2$ をみたし成り立つ．

（ii） $n = k$ のとき，$1 \leqq x_k < 2$ が成り立つと仮定すると，

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} - 1 &= \sqrt{x_k + 2} - 1 \\
&= \frac{x_k + 1}{\sqrt{x_k + 2} + 1} > 0 \quad \text{☜ 分子を有理化します．} \\
2 - x_{k+1} &= 2 - \sqrt{x_k + 2} \\
&= \frac{2 - x_k}{2 + \sqrt{x_k + 2}} > 0 \quad \text{☜ 分子を有理化します．}
\end{aligned}
$$

よって，$n = k + 1$ のときも成り立つ．

ゆえに，$1 \leqq x_n < 2$ が成り立つことが示された．　（証明終）……（答）

(2) 与えられた漸化式から

$$
0 < |2 - x_{n+1}| = \left|2 - \sqrt{x_n + 2}\right| = \left|\frac{4 - (x_n + 2)}{2 + \sqrt{x_n + 2}}\right| = \left|\frac{2 - x_n}{2 + \sqrt{x_n + 2}}\right|
$$

が成り立つ．ここで，(1) より $1 \leqq x_n < 2$ であるから，

$$
\left|\frac{2 - x_n}{2 + \sqrt{x_n + 2}}\right| = \frac{|2 - x_n|}{2 + \sqrt{x_n + 2}} < \frac{1}{2}|2 - x_n| < \cdots < \left(\frac{1}{2}\right)^n |2 - x_1| = \left(\frac{1}{2}\right)^n
$$

となる．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ であるから，はさみうちの原理より，

$$
\lim_{n\to\infty}(2 - x_n) = 0 \iff \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} x_n = 2} \cdots\cdots(\text{答})
$$

である．

◇ ♡

(2) での不等式の導き方はちょっと思いつかないよ！って人が多いかもしれません．それはあることを知らないから当然です．そのあることとは，(2) の答えです．何言ってるの？って思うかもしれませんが，実は (2) でいきなり登場した $\left|2-x_{n+1}\right|$ に大きなヒントがあります．この類の問題では，

$$0 < x_n - (\text{答}) < p^n \quad (0 < p < 1)$$

という形の式を作って，右辺が 0 に近づくので，はさみうちの原理によって x_n が (答) に近づくという考え方を用いています．したがって，(2) の答えが予想できなければ不等式を作ることは困難なのです．あれっ！？それってなんか矛盾してませんか？答え（極限値）が求めたいのに答え（極限値）を知らないと解けないって…それはあくまで答えを予想するのであって，答えを求めるわけではないという点に注意しましょう．（予想して証明！帰納法と同じ考え方です）小問で誘導されている場合はそれにしたがって解けばよいのですが，本問のように誘導がない場合は，答えを予想する手段を知っておく必要があるのです．

では，答えを予想する手段を説明しましょう．まず

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

とします．この α が答えになりますね！この式が成り立っていると言うことは，

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \alpha$$

も成り立っているということになります．つまり，与えられた漸化式において

$$x_{n+1} = x_n = \alpha$$

とおいて α の方程式を解いてみます．

$$\alpha = \sqrt{\alpha+2} \quad \Longrightarrow \quad \alpha^2 = \alpha + 2 \quad \Longleftrightarrow \quad (\alpha-2)(\alpha+1) = 0$$

(1) より，$1 \leqq x_n < 2$ なので，$\alpha = 2$ であることがわかります．(x_n は 2 になれませんが，α は $n \to \infty$ のときの x_n の極限値なので，$\alpha = 2$ と表しても問題ありません．)

これで，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ であるという予想が立ちました！これを元にして，

$$0 < x_n - 2 < p^n \quad (0 < p < 1)$$

という形の不等式を立式するのです．不等式を立式するためのポイントが分かったので，不等式の立式は経験を積んで慣れてください．

ちょっと話はそれますが，「$x_{n+1} = x_n = \alpha$ とおいて α の方程式を解いてみます．」という部分で何か思い出しませんか？そうです！隣接２項間漸化式の特性方程式です！

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$$

などの変形の時に用いますよね？この漸化式を $a_1 = 3$ とでもして解いてみてください．そして $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を計算してみてください．そうすると，その極限値は特性方程式の解になっていることが分かると思います．しかし，これはいつも成り立つとは限りません．例えば，$a_{n+1} = pa_n + q$ で $p \geqq 1$ のときは，発散してしまいます．このことまで詳しく話していると大学の範囲に突入して今回のテーマからはずれてしまうのでここでは述べません．興味がある人は調べてみてください．

それでは，ここで類題を 3 題用意していますので，やってみましょう！

◀演習問題▶

2 解答 ☞ p.6

数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=4,\ a_{n+1}=\sqrt{2a_n+3}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

3 解答 ☞ p.7

数列 $\{x_n\}$ を次のように定める．

$$x_1=[a]\ ,\quad x_{n+1}=\sqrt{3x_n+4}\quad (0\leqq a\leqq 3)$$

ただし，$[a]$ は a を越えない最大の整数を表すものとする．

(1) $[a]\leqq x_n<4$ を数学的帰納法を用いて証明せよ．

(2) $0<4-x_{n+1}\leqq \dfrac{3}{4+\sqrt{3[a]+4}}(4-x_n)$ を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ．

4 解答 ☞ p.9

自然数 n に対して，$a_1=3$, $b_1=1$

$$a_{n+1}=\frac{a_n+2b_n}{2}\quad ,\quad b_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+2b_n}$$

をみたす数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある．

(1) a_nb_n を求めよ．

(2) $a_n>2b_n>0$ であることを証明せよ．

(3) $n\geqq 2$ のとき，

$$a_n-2b_n<\frac{1}{2}(a_{n-1}-2b_{n-1})$$

であることを証明せよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

方針　まずは答えの予想からです．$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と仮定しましょう．すると，$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が成り立つので，与えられた漸化式に $a_{n+1} = a_n = \alpha$ を代入してみます．

$$\alpha = \sqrt{2\alpha+3} \quad \Longrightarrow \quad \alpha^2 = 2\alpha + 3 \quad \Longleftrightarrow \quad (\alpha-3)(\alpha+1) = 0$$

となるので，$\alpha = 3$ であることがわかります．($\alpha = -1$ は，最初の方程式を満たさないので不適です．これは，2 乗することで得られた実際にはありえない解で「無縁解」といいます．)

2 解答 と 解説

与えられた漸化式を変形すると，

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \sqrt{2a_n+3} &\Longleftrightarrow a_{n+1} - 3 = \sqrt{2a_n+3} - 3 && \text{☜ 予想した極限値を両辺から引く．} \\ &\Longleftrightarrow a_{n+1} - 3 = \frac{2a_n+3-9}{\sqrt{2a_n+3}+3} && \text{☜ 分子を有理化する．} \\ &\Longleftrightarrow a_{n+1} - 3 = \frac{2(a_n-3)}{\sqrt{2a_n+3}+3} && \text{☜ 分子を計算する．} \\ &\Longleftrightarrow a_{n+1} - 3 = \frac{2}{\sqrt{2a_n+3}+3}(a_n-3) && \text{☜ 右辺を変形する．} \end{aligned}$$

両辺の絶対値をとると，

$$\begin{aligned} |a_{n+1}-3| &= \left|\frac{2}{\sqrt{2a_n+3}+3}(a_n-3)\right| \\ &= \frac{2}{\sqrt{2a_n+3}+3}|a_n-3| && \text{☜ } \frac{2}{\sqrt{2a_n+3}+3} \geqq 0 \text{ なので絶対値をはずす．} \\ &\leqq \frac{2}{3}|a_n-3| && \text{☜ } \sqrt{2a_n+3} \geqq 0 \text{ なので，} \frac{2}{\sqrt{2a_n+3}+3} \leqq \frac{2}{3} \\ &\leqq \left(\frac{2}{3}\right)^2 |a_{n-1}-3| \\ &\leqq \cdots\cdots \\ &\leqq \left(\frac{2}{3}\right)^n |a_1-3| \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n && (\because \ a_1 = 4) \end{aligned}$$

ゆえに，

$$0 \leqq |a_n-3| \leqq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-3| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 3}\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

♣ ◇ ♠ ♡

解説

前半の山場は，極限を予想して

$$a_{n+1} - 3 = \frac{2}{\sqrt{2a_n+3}+3}(a_n-3) \quad \Longrightarrow \quad |a_{n+1}-3| \leqq \frac{2}{3}|a_n-3|$$

のような変形をするところにあります．この部分がしっかり演習できていないと，この問題を攻略することはできません．自力で変形できるようにしておきましょう．

$\boxed{\text{方針}}$ 誘導にしたがって，素直に計算していけば解けるのですが，(1) では，$[a]$ の扱いがポイントになります．$0 \leqq a \leqq 3$ という条件から $[a]=0,\ 1,\ 2,\ 3$ となることに注意しましょう．

3 解答 と 解説

(1) 【証明】

$[a] \leqq x_n < 4$ ……① とする．

（ｉ） $n=1$ のとき，

$x_1=[a]$ より，① は成り立つ．

（ii） $n=k$ のとき，すなわち，

$[a] \leqq x_k < 4$ が成り立つと仮定すると，

$x_{k+1}=\sqrt{3x_k+4}$ から，

$$\sqrt{3[a]+4} \leqq x_{k+1} < \sqrt{3\times\ 4+4}=4$$

また，

$$\begin{aligned} x_{k+1}-[a] &\geqq \sqrt{3[a]+4}-[a] \\ &= \frac{3[a]+4-[a]^2}{\sqrt{3[a]+4}+[a]} \end{aligned}$$

ここで，$0 \leqq a \leqq 3$ より，$[a]=0,\ 1,\ 2,\ 3$ であるから，

$$3[a]+4-[a]^2>0$$

ゆえに，

$$[a] \leqq x_{k+1} < 4$$

よって，$n=k+1$ のときも，① は成立する．

ゆえに，(ｉ), (ii) より，① は成立する． (証明終)……(答)

(2) 【証明】

$$\begin{aligned} 4-x_{n+1} &= 4-\sqrt{3x_n+4} \\ &= \frac{16-3x_n-4}{4+\sqrt{3x_n+4}} \\ &= \frac{3(4-x_n)}{4+\sqrt{3x_n+4}} \end{aligned}$$

$[a] \leqq x_n < 4$ から，

$$0<\frac{3(4-x_n)}{4+\sqrt{3x_n+4}} \leqq \frac{3(4-x_n)}{4+\sqrt{3[a]+4}}$$

ゆえに，

$$0<4-x_{n+1} \leqq \frac{3}{4+\sqrt{3[a]+4}}(4-x_n)$$

が示された． (証明終)……(答)

(3) (2) の結果より，

$$
\begin{aligned}
0 < 4 - x_{n+1} &\leqq \frac{3}{4+\sqrt{3[a]+4}}(4-x_n) \\
&\leqq \left(\frac{3}{4+\sqrt{3[a]+4}}\right)^2(4-x_{n-1}) \\
&\leqq \cdots\cdots \qquad ☞ \boxed{\text{解説}} \\
&\leqq \left(\frac{3}{4+\sqrt{3[a]+4}}\right)^n(4-x_1) \\
&= \left(\frac{3}{4+\sqrt{3[a]+4}}\right)^n(4-[a])
\end{aligned}
$$

である．ここで，$0<\dfrac{3}{4+\sqrt{3[a]+4}}<1$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4+\sqrt{3[a]+4}}\right)^n(4-[a])=0$$

ゆえに，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n\to\infty}(4-x_n)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} x_n = 4}\cdots\cdots(\text{答})$$

———— ♣ ———— ♢ ———— ♠ ———— ♡ ————

$\boxed{\text{解説}}$

(3) での式変形は，p.2 で説明したものと同じ原理で行っています．もう一度簡単に説明しておくのでしっかりと理解しておきましょう．この式変形は次の部分に着目します．

$$\left(\frac{3}{4+\sqrt{3[a]+4}}\right)^{\boldsymbol{\alpha}}(4-x_{\boldsymbol{\beta}})$$

この α, β は，式が一つ進むにつれて α は 1 つずつ大きくなり，β は 1 つずつ小さくなっていきます．すなわち，常に $\alpha+\beta$ は一定の値をとるのです．この式変形では，最初の段階で $\alpha+\beta=n+1$ となっているので，今わかっている値 x_1 まで変形させると，α の値は，$\alpha=n+1-1=n$ となるわけです．

方針 本問も誘導にしたがって解いていけばすんなり解けますが，(4) でどのようにして $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めるかが問題になります．もちろん (3) を利用するのでしょうが，これだけでは b_n が邪魔になってしまうので，別の不等式を見つけてくる必要がありそうです．

4 解答 と 解説

(1)

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}b_{n+1} &= \frac{a_n+2b_n}{2}\cdot\frac{2a_nb_n}{a_n+2b_n}\\
&= a_nb_n\\
&= a_{n-1}b_{n-1}\\
&= \cdots\cdots\\
&= a_1b_1=3
\end{aligned}
$$

したがって，$\boldsymbol{a_nb_n=3}$……(答)

(2) 【証明】

$a_1>0$, $b_1>0$ であるから，与えられた漸化式より，帰納的に $a_n>0$, $b_n>0$ であることは明らかなので，$a_n>2b_n$ を示そう．

(ⅰ) $n=1$ のとき，$a_1=3$, $2b_1=2$ となるので，成り立つ．

(ⅱ) $n=k$ のとき，すなわち $a_k>2b_k>0$ が成り立つと仮定すると，

$$
\begin{aligned}
a_{k+1}-2b_{k+1} &= \frac{a_k+2b_k}{2}-\frac{4a_kb_k}{a_k+2b_k}\\
&= \frac{(a_k+2b_k)^2-8a_kb_k}{2(a_k+2b_k)}\\
&= \frac{(a_k-2b_k)^2}{2(a_k+2b_k)}>0
\end{aligned}
$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

(ⅰ),(ⅱ) より，すべての自然数 n について $a_n>2b_n>0$ が成り立つ． (証明終)……(答)

(3) 【証明】

$n\geqq 2$ のとき，

$$
\begin{aligned}
a_n-2b_n &= \frac{(a_{n-1}-2b_{n-1})^2}{2(a_{n-1}+2b_{n-1})}\\
&= \frac{(a_{n-1}-2b_{n-1})}{2(a_{n-1}+2b_{n-1})}(a_{n-1}-2b_{n-1})
\end{aligned}
$$

☜ (2) の (ⅱ) の計算において，$k=n-1$ とした式

ここで，(2) の結果より，$a_{n-1}+2b_{n-1}>a_{n-1}-2b_{n-1}$ であるから，

$$
\begin{aligned}
a_n-2b_n &< \frac{(a_{n-1}+2b_{n-1})}{2(a_{n-1}+2b_{n-1})}(a_{n-1}-2b_{n-1})\\
&= \frac{1}{2}(a_{n-1}-2b_{n-1})
\end{aligned}
$$

よって示された． (証明終)……(答)

(4)　(2) より，$a_n > 2b_n > 0$ であるから，

$$\begin{cases} 4b_n^2 < 2a_nb_n \cdots\cdots ① \\ 2a_nb_n < a_n^2 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①, ② より，$4b_n^2 < 2a_nb_n < a_n^2 \quad\Longleftrightarrow\quad 4b_n^2 < 6 < a_n^2 \quad (\because\ (1))$

ゆえに，$2b_n < \sqrt{6} < a_n$ となるので，

$$0 < a_n - \sqrt{6} < a_n - 2b_n$$

ここで，(3) より，

$$\begin{aligned} a_n - 2b_n &< \frac{1}{2}(a_{n-1} - 2b_{n-1}) \\ &< \cdots\cdots \\ &< \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1 - 2b_1) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \longrightarrow 0 \ (n \to \infty)$$

よって，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - \sqrt{6}) = 0$$

ゆえに，

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{6}} \cdots\cdots (答)$$

♣ ◊ ♠ ♡

解説

連立漸化式において極限を求める問題です．誘導無しで極限を求めるのははっきり言ってかなり難しいでしょう．丁寧に誘導していますが，一つ一つの証明が何に使えるかわからないとやっぱり難問であることに変わりはありません．これもしっかりとした訓練が必要な問題です．

さて，ここまでで基本的なものは終わりです．基本とは言ってもそれはあくまでこの類の問題の基本であって，入試レベルとしては標準からやや難だと思ってよいでしょう．では，これを応用した問題に突入していきます．ここからが今回のテーマのメインになります．

・ $x_{n+1}=f(x_n)$ で定義される数列の極限

これまでは，計算が主体でしたが，ここからは問題がやや複雑化していきます．計算量が増え考え方が難しくなるので，前ページまでの式変形などがまだよく理解できていない人はここには進まないで下さい．また，微分法や平均値の定理などを利用するので，そこに自信がない人や忘れてしまっている人は，まずそこをしっかりと固めておいてください．では，まず次の問題をベースにして解説していきましょう．

’94　筑波大

例題　（筑波大）

関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　導関数 $f'(x)$ の最大値を求めよ．

(2)　方程式 $f(x)=x$ はただ 1 つの実数解をもつことを示せ．

(3)　漸化式 $a_{n+1}=f(a_n)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ は初項 a_1 の値によらず収束し，その極限値は (2) の方程式の解になることを示せ．

当然 (3) がこの問題で示したいことなのですが，それを示すには問題全体の流れをつかんで解答しなければいけません．しかし，この問題に触れたことが無い人は，今の段階で (1), (2) が何のためにあるのか理解できる人はほとんどいないでしょう．流れをつかむのは後回しにして，(2) までは基本問題なのでとりあえず言われるがまま解いてみましょう．

―――――― ♣ ―――――― ♠ ――――――

解答 と **解説**

(1)　**方針**　まずは導関数 $f'(x)$ を求めて，それを新たな関数と見て，もう一度微分し，増減表をかきます．

与えられた関数を両辺 x で微分すると，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} \\ &= \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \\ &= \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \end{aligned}$$

☜ 分子分母に e^{2x} をかけて形を綺麗にします．

ここで，$g(x)=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$ とおくと，

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{e^x(e^x+1)^2-e^x\cdot 2(e^x+1)\cdot e^x}{(e^x+1)^4} \\ &= \frac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot 2\cdot e^x}{(e^x+1)^3} \\ &= \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3} \end{aligned}$$

であるから，$g'(x)=0$ のとき，$x=0$ となる．よって，増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

ゆえに，$g(x)$ の最大値すなわち $f'(x)$ の最大値は，$g(0)=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$……(答)

(2) $\boxed{\text{方針}}$ $h(x)=f(x)-x$ とおいて，$y=h(x)$ が x 軸とただ 1 つの交点を持つことを示します．

【証明】

$h(x)=f(x)-x$ とおくと，

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)-1 \\ &= \frac{e^x}{(e^x+1)^2}-1 \\ &= \frac{e^x-(e^x+1)^2}{(e^x+1)^2} \\ &= -\frac{e^{2x}+e^x+1}{(e^x+1)^2}<0 \end{aligned}$$

より，$y=h(x)$ は単調減少関数である．ここで，$y=h(x)$ はすべての実数 x で連続であり，

$$\begin{aligned} h(0) &= f(0)-0 \\ &= \frac{1}{2}>0 \\ h(1) &= f(1)-1 \\ &= \frac{1}{1+e^{-1}}-1 \\ &= -\frac{1}{e+1}<0 \end{aligned}$$

であるから，中間値の定理により，$y=h(x)$ は x 軸とただ 1 つの交点をもつ．ゆえに，示された．

(証明終)……(答)

さて，ここからが本題です．(1), (2) の設問の必要性はまだわかりません．しかし，(1) で $f'(x)$ の最大値を求めたり，(2) で実数解が一つしかないという証明をさせられたりしたのですから，これらは (3) の証明をするために必要な準備なんだと考えるのが自然でしょう．(問題によっては，全く無関係な問いがあることもあるので，必ずとは言えないのですが…) では，(3) はどこから手をつければよいのでしょうか？ p.10 までにやってきた事を思い出して下さい．一般項が求められない数列の極限を求めるためには，不等式を作ってはさみうちの原理を利用するというのが定石でした．まずは，それを頭に入れて式を作ってみましょう．考え方は同じなのですが，ここでは発想力が必要になります．

(3) (2) の方程式の解を $x=\alpha$ とすると，$\alpha=f(\alpha)$ が成り立つので，

$$\begin{aligned} a_{n+1}=f(a_n) &\iff a_{n+1}-\alpha=f(a_n)-\alpha \\ &\iff a_{n+1}-\alpha=f(a_n)-f(\alpha) \quad \cdots\cdots① \end{aligned}$$

と式変形できる．ここで，$f(x)$ は微分可能であるから，平均値の定理より，

$$f(a_n)-f(\alpha)=f'(c)(a_n-\alpha) \quad \cdots\cdots②$$

をみたす実数 c が存在する．①, ② より，

$$a_{n+1}-\alpha=f'(c)(a_n-\alpha) \quad \Longrightarrow \quad |a_{n+1}-\alpha|=|f'(c)||a_n-\alpha|$$

であり，(1) より，$f'(c)\leqq\dfrac{1}{4}$ となることから，

$$|a_{n+1}-\alpha|=|f'(c)||a_n-\alpha| \quad \Longrightarrow \quad |a_{n+1}-\alpha|\leqq\frac{1}{4}|a_n-\alpha|$$

が成り立つ．したがって，

$$|a_{n+1}-\alpha|\leqq\frac{1}{4}|a_n-\alpha| \quad \Longrightarrow \quad 0\leqq|a_n-\alpha|\leqq\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}|a_1-\alpha|$$

となる．

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}|a_1-\alpha|=0$$

であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-\alpha|=0 \iff \lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$$

ゆえに，示された． (証明終)……(答)

◇ ♡

解答を見れば (1), (2) の必要性が理解できると思います．逆に，もし (1), (2) が無い場合は，自分で求めたり証明したりしなければならないので，難易度が格段に高くなります．したがって，この問題の流れをしっかりと理解しておく必要があるのです．(3) の後半は，この講座の前半で十分に練習しているはずなので，ここまで式変形できれば，ゴールは簡単に見えてきます．つまり，いかにして $|a_{n+1}-\alpha|\leqq\dfrac{1}{4}|a_n-\alpha|$ という形を作り出すかがポイントになるのです．平均値の定理は，こうした変形をするための道具にすぎません．普段あまり使い慣れていない定理だと思いますが，いざという時には利用できるように頭の片隅に置いておく必要があるのです．

この問題の流れを頭に植え付けておいて，次の類題を解いてみましょう．

◀類題演習▶

5 （山梨大・改）

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において関数 $f(x)=e^{-x}(\cos x+\sin x)$ を考える．

(1)　$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において $f(x)$ の導関数の絶対値 $|f'(x)|$ の最大値を求めよ．

(2)　方程式 $x=f(x)$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ にただ 1 つの解をもつことを示せ．

(3)　数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1=0,\ x_{n+1}=f(x_n)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

と定める．(1) の最大値を K, (2) の解を α とするとき，

$$|x_{n+1}-\alpha|\leqq K|x_n-\alpha|\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つことを示し，$\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$ を証明せよ．

方針　先ほどの 例題 と全く同じ流れです．本問はそれをもっと丁寧に誘導してくれているので，自力で答案を作成してみましょう．

♣ ♠

解答 と **解説**

(1)

$$\begin{aligned}f'(x)&=-e^{-x}(\cos x+\sin x)+e^{-x}(-\sin x+\cos x)\\&=-2e^{-x}\sin x\end{aligned}$$

ここで，$g(x)=|f'(x)|=2e^{-x}\sin x$ ($\because$ $-2e^{-x}\sin x\leqq 0$) とおくと，

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2e^{-x}\sin x + 2e^{-x}\cos x \\ &= 2e^{-x}(\cos x - \sin x) \end{aligned}$$

であるから，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $g'(x) = 0$ となるのは，$x = \dfrac{\pi}{4}$ のときである．よって，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

ゆえに，$g(x)$ の最大値すなわち $\left|f'(x)\right|$ の最大値は，$g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \boldsymbol{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}}$……(答)

(2) 【証明】

$h(x) = x - f(x)$ とおくと，

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1 - f'(x) \\ &= 1 + 2e^{-x}\sin x > 0 \quad \left(\because\ 0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

より，$y = h(x)$ は単調増加関数である．ここで，$y = h(x)$ はすべての実数 x で連続であり，

$$\begin{aligned} h(0) &= -1 < 0 \\ h\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} > 0 \end{aligned}$$

であるから，中間値の定理により，$y = h(x)$ は x 軸とただ 1 つの交点をもつ．ゆえに，示された．

(証明終)……(答)

(3) まず，$0 \leqq x_n \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であることを数学的帰納法を用いて示す．

(ｉ) $n = 1$ のとき，$x_1 = 0$ より，成り立つ．

(ⅱ) $n = k$ のとき，すなわち

$$0 \leqq x_k \leqq \frac{\pi}{2}$$

が成り立つと仮定すると，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において，$f'(x) = -2e^{-x}\sin x < 0$ であるから，$f(x)$ は単調減少である．したがって，

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leqq f(x) \leqq f(0) \iff 0 < e^{-\frac{\pi}{2}} \leqq f(x) \leqq 1 < \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ．ゆえに，$0 < f(x_k) < \dfrac{\pi}{2}$ すなわち $0 < x_{k+1} < \dfrac{\pi}{2}$ となるので，$n = k+1$ のときも成り立つ．

ゆえに，示された．

(2) の方程式の解を $x = \alpha$ とすると，$\alpha = f(\alpha)$ が成り立つので，

$$\begin{aligned} x_{n+1} = f(x_n) &\iff x_{n+1} - \alpha = f(x_n) - \alpha \\ &\iff x_{n+1} - \alpha = f(x_n) - f(\alpha) \quad \cdots\cdots① \end{aligned}$$

と式変形できる．ここで，$f(x)$ は微分可能であるから，平均値の定理より，

$$f(x_n) - f(\alpha) = f'(c)(x_n - \alpha) \quad \cdots\cdots②$$

をみたす実数 c が存在する．①, ② より，

$$x_{n+1} - \alpha = f'(c)(x_n - \alpha) \implies \left|x_{n+1} - \alpha\right| = \left|f'(c)\right|\left|x_n - \alpha\right|$$

であり，(1) より，$\left|f'(c)\right| \leqq K$ となることから，

$$|x_{n+1}-\alpha|=|f'(c)||x_n-\alpha| \quad \Longrightarrow \quad |x_{n+1}-\alpha| \leqq K|x_n-\alpha|$$

が成り立つ．したがって，

$$|x_{n+1}-\alpha| \leqq K|x_n-\alpha| \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqq |x_n-\alpha| \leqq K^{n-1}\alpha \quad (\because\ x_1=0)$$

となる．ここで，

$$0<K=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{\pi}{4}}}<\frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{2}{4}}}=\sqrt{\frac{2}{e}}<1$$

より，

$$\lim_{n\to\infty} K^{n-1}\alpha=0$$

であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-\alpha|=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$$

ゆえに，示された．　(証明終)……(答)

$\diamondsuit$ $\heartsuit$

例題 とよく似ている問題ですが，決定的に違うところは，定義域です．**例題** では x が全ての実数をとっていたので，特に気にすることなく (3) を解きましたが，本問では x が $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ という定義域を持っているため，(3) で (1), (2) の結果を用いるためには，$0 \leqq x_n \leqq \frac{\pi}{2}$ を示す必要があるのです．なぜなら (1) で求めた $|f'(x)|$ の最大値や (2) で示したことは，どちらも $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ という条件の元で示したことなので，(3) でその結果を使いたければ，当然条件をみたしていなければならないからです．この議論が欠落している場合は，大幅な減点を覚悟しなければいけません．

では，最後に演習問題を解いて終わりにしましょう．