2 つの放物線

$$\begin{cases} C_1 : f(x) = -x^2 + 4x - 1 \\ C_2 : g(x) = mx^2 \end{cases}$$

がある．ただし，m は定数とする．

(1)　C_1 と C_2 が接するときの m の値と接点を求め，共通接線の方程式を求めよ．

(2)　C_1 と C_2 が異なる 2 点 A, B で交わるとき，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を S とする．2 点 A, B を通る直線 l が S を 2 等分するとき，m の値を求めよ．

2 つの放物線

$$\begin{cases} C_1 : f(x) = -x^2 + 4x - 1 \\ C_2 : g(x) = mx^2 \end{cases}$$

がある．ただし，m は定数とする．

(1)　C_1 と C_2 が接するときの m の値と接点を求め，共通接線の方程式を求めよ．

(2)　C_1 と C_2 が異なる 2 点 A, B で交わるとき，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を S とする．2 点 A, B を通る直線 l が S を 2 等分するとき，m の値を求めよ．

【テーマ】：面積計算のテクニック

方針

(1) は $f(x) = g(x)$ が重解をもてばよいので，(判別式) $= 0$ を用いますが，2 次の係数に文字が含まれているので，場合分けが必要です．(2) は，面積計算をしますが，2 点 A, B を通る直線の方程式を求める必要はありません．

♣　♠

解答

(1)　C_1 と C_2 が接するので，

$$-x^2 + 4x - 1 = mx^2 \iff (m+1)x^2 - 4x + 1 = 0 \cdots\cdots ①$$

が重解をもてばよい．

(ｉ)　$m + 1 = 0$ すなわち $m = -1$ のとき，① は 1 次方程式となり，重解をもたないので不適．

(ii)　$m + 1 \neq 0$ すなわち $m \neq -1$ のとき，① の判別式を D とすると，

$$D/4 = 4 - (m+1) = 0 \qquad \therefore \ \boldsymbol{m = 3} \cdots\cdots \text{(答)}$$

このとき，① は，

$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \iff (2x-1)^2 = 0 \qquad \therefore \ x = \frac{1}{2} \text{ このとき，} y = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

となるので，接点は $\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)}$……(答)

また，共通接線の方程式は，$g(x)$ 上の点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ における接線を求めればよい．$g(x) = 3x^2$ より，$g'(x) = 6x$ であるから，

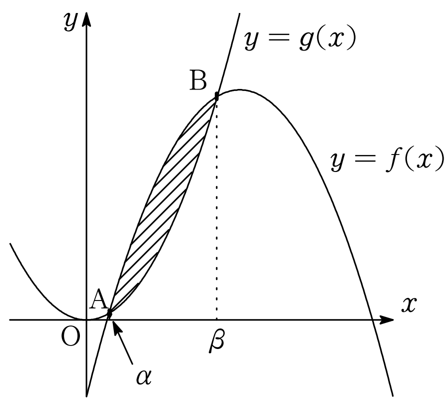
$$\therefore \ y = 6 \cdot \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} \iff \boldsymbol{y = 3x - \frac{3}{4}} \cdots\cdots \text{(答)}$$

(2)　C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるためには，$D>0$ となればよいので，(1) より，

$$4 - (m+1) > 0 \iff m < 3$$

C_1 と C_2 の交点の x 座標を α, β $(\alpha < \beta)$ とすると，α, β は ① の 2 解であり，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ において，$f(x) \geqq g(x)$ であるから，

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \{f(x)-g(x)\}\,dx \\ &= \int_\alpha^\beta \{-(m+1)x^2+4x-1\}\,dx \\ &= -(m+1)\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= -(m+1)\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\} \\ &= \frac{m+1}{6}(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$



題意をみたすためには，l と C_2 で囲まれる部分の面積が $\dfrac{S}{2}$ となればよい．ここで，l を表す方程式を $y=h(x)$ とすると，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ において $h(x) \geqq g(x)$ であり，$y=h(x)$ は 1 次関数であることから，

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \int_\alpha^\beta \{h(x)-mx^2\}\,dx \\ &= -m\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= -m\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\} \\ &= \frac{m}{6}(\beta-\alpha)^3 \qquad\qquad \therefore\ S=\frac{m}{3}(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

したがって，

$$\frac{m+1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{m}{3}(\beta-\alpha)^3 \iff m+1=2m \qquad \therefore\ \boldsymbol{m=1}\cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

まず，次の公式が成り立つことを確認してください．

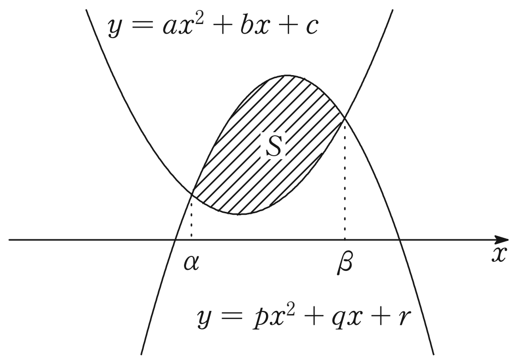
$$\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

2 つの 2 次関数で囲まれる部分の面積は，この公式を用いて簡単に求めることができます．

2 つの 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$, $y=px^2+qx+r$ のグラフが下図のように，異なる 2 点で交わっているとき，これらの曲線で囲まれる部分の面積 S は，

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \{(px^2+qx+r)-(ax^2+bx+c)\}\,dx \\ &= (p-a)\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= -\frac{p-a}{6}(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

となる．



面積を計算するときは，2 次関数の 2 次の係数と交点の x 座標だけが必要であることに注意しましょう．交点の x 座標がわかっていれば，1 次の係数と定数項を知る必要はありません．解答 で直線 AB の方程式を求めなかったのは，このためです．式変形は，計算による変形だけではなく意味をしっかりと捉えることで効率よい変形が行えることを知っておきましょう．

a, b を実数とし，$P = a^4 - 4a^2b + b^2 + 3b$ とおく．

（1） すべての b に対して $P \geqq 0$ となるような a の値の範囲を求めよ．

（2） すべての a に対して $P \geqq 0$ となるような b の値の範囲を求めよ．

a, b を実数とし，$P = a^4 - 4a^2b + b^2 + 3b$ とおく．

(1) すべての b に対して $P \geqq 0$ となるような a の値の範囲を求めよ．

(2) すべての a に対して $P \geqq 0$ となるような b の値の範囲を求めよ．

【テーマ】：絶対不等式

方針

文字が 2 つあるので，どちらの文字を変数として考えるのかをはっきりさせる必要があります．その際，他の文字は定数という見方をします．

すべての b についてといわれたら，b を変数としてみなすとよいでしょう．その際，a は定数扱いです．よくわからないときは，$b = x$ と置き換えるとわかりやすいかもしれません．(2) は a, b の立場が (1) とは逆になります．このとき，a については 4 次式になるので，置き換えをするとよいでしょう．ただし，置き換えしたら新しい変数のとり得る値の範囲に注意が必要です．

♣ ♠

解答

(1) b について整理すると，

$$P = b^2 - (4a^2 - 3)b + a^4$$

となるので，すべての b に対して，$P \geqq 0$ となるためには，$P = 0$ の判別式を D_1 とすると，

$$\begin{aligned} D_1 &= (4a^2-3)^2 - 4a^4 \leqq 0 \\ & 16a^4 - 24a^2 + 9 - 4a^4 \leqq 0 \\ & 4a^4 - 8a^2 + 3 \leqq 0 \\ & (2a^2-3)(2a^2-1) \leqq 0 \\ \therefore\ & \frac{1}{2} \leqq a^2 \leqq \frac{3}{2} \iff \boldsymbol{-\frac{\sqrt{6}}{2} \leqq a \leqq -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leqq a \leqq \frac{\sqrt{6}}{2}} \cdots\cdots\text{(答)} \end{aligned}$$

(2) a について整理すると，

$$P = a^4 - 4ba^2 + b^2 + 3b$$

となるので，$a^2 = x$ とおくと，$x \geqq 0$ であり，

$$P = x^2 - 4bx + b^2 + 3b$$

と変形することができる．よって，$x \geqq 0$ となるすべての x に対して，$P \geqq 0$ となるための b の値の範囲を求めればよい．

$$f(x) = x^2 - 4bx + b^2 + 3b = (x-2b)^2 - 3b^2 + 3b$$

とおくと，

(i) $2b<0$ かつ $f(0) \geqq 0$

または

(ii) $2b \geqq 0$ かつ $-3b^2 + 3b \geqq 0$

であればよい．(i) より，

$$b<0 \text{ かつ } f(0)=b^2+3b \geqq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b \leqq -3$$

（ii）より，

$$b \geqq 0 \text{ かつ } b^2-b \leqq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leqq b \leqq 1$$

ゆえに，求める b の値の範囲は，

$\boldsymbol{b \leqq -3,\ 0 \leqq b \leqq 1}$**……(答)**

である．

解説

頻出の問題であるが，2 つの変数があると混乱してしまい，どのように考えてよいかわからないという人が多いのが現状です．しかし，どの文字を変数として考え，どの文字を定数として考えるかをはっきりさせることである程度方針が見えてくるでしょう．

関数 $f_n(x)=\sin^{n+2}x+2\cos^{n+2}x$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ について，次の問いに答えよ．

（1） 閉区間 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ における $f_n(x)$ の最大値 M_n と最小値 L_n を求めよ．

（2） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{L_n}$ を求めよ．

関数 $f_n(x)=\sin^{n+2}x+2\cos^{n+2}x$ $(n=1,\,2,\,\cdots)$ について，次の問いに答えよ．

（1） 閉区間 $\left[0,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ における $f_n(x)$ の最大値 M_n と最小値 L_n を求めよ．

（2） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{L_n}$ を求めよ．

【テーマ】：三角関数の最大値・最小値

方針

定石通り，$f_n'(x)$ を求めて増減表をかき，最大値と最小値を求めますが，最小値をとるときの x の値を求めることができません．このようなときは，その x の値を α とおいて処理します．

解答

（1） 与えられた関数 $f_n(x)$ を x で微分すると，

$$\begin{aligned}f_n'(x)&=(n+2)\sin^{n+1}x\cdot\cos x+2(n+2)\cos^{n+1}x\cdot(-\sin x)\\&=(n+2)\sin x\cos x(\sin^n x-2\cos^n x)\end{aligned}$$

よって，$f_n'(x)=0$ のとき，

$$\sin x=0,\quad \cos x=0,\quad \sin^n x-2\cos^n x=0$$

であり，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であることから，$\sin x=0,\,\cos x=0$ より，$x=0,\,\dfrac{\pi}{2}$ を得る．

$$\sin^n x-2\cos^n x=0\iff\sin^n x=2\cos^n x\iff\tan^n x=2\quad(\because\ \cos x\neq 0)$$

となるので，これをみたす x の値はただ一つ存在することから，その値を α とおくと，次の増減表を得る．

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f_n'(x)$	0	$-$		$+$	0
$f_n(x)$	2	$\searrow$	L_n	$\nearrow$	1

ここで，$x=\alpha$ のとき，すなわち $f_n(\alpha)$ の値を求めよう．α は $\sin^n\alpha=2\cos^n\alpha$……① をみたすので，

$$\begin{aligned}f_n(\alpha)&=\sin^{n+2}\alpha+2\cos^{n+2}\alpha\\&=\sin^n\alpha\cdot\sin^2\alpha+2\cos^n\alpha\cdot\cos^2\alpha\\&=2\cos^n\alpha\cdot\sin^2\alpha+2\cos^n\alpha\cdot\cos^2\alpha\\&=2\cos^n\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\\&=2\cos^n\alpha\end{aligned}$$

また，① から，$\tan^n\alpha=2$ より，$\tan\alpha=\sqrt[n]{2}$ であるから，

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} \iff \cos^2\alpha = \frac{1}{1+(\sqrt[n]{2})^2} \quad \therefore\ \cos^n\alpha = \left(\frac{1}{1+2^{\frac{2}{n}}}\right)^{\frac{n}{2}}$$

となるので，求める最大値と最小値は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{M_n = 2} \\ \boldsymbol{L_n = 2\left(1+2^{\frac{2}{n}}\right)^{-\frac{n}{2}}} \end{cases} \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　(1) より，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{L_n} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\left(1+2^{\frac{2}{n}}\right)^{-\frac{n}{2}}} \\ &= \lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}\left(1+2^{\frac{2}{n}}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 2^0(1+2^0)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

◇　　　　♡

解説

関数の最大値・最小値を求めるときは，微分をして増減を調べ，増減表から求めるのが定石ですが，いつも導関数の値を 0 にする x の値が求まるわけではありません．このような問題では，まず導関数を 0 にする x の値が何個あるかを調べて，その値を α などの文字で置きます．ただし，α は自分で勝手においた文字なので，基本的に答えで α を用いることはできません．したがって，最後に α を消すために，α のみたすべき式を使って，α を消去するのです．このような計算を伴う問題はよく出題されるので，必ず一度はやっておきたい問題です．

【問題】

$\alpha = 3 + \sqrt{7}$, $\beta = 3 - \sqrt{7}$ とし，$x_n = \alpha^n + \beta^n$ とおく.

（1） x_{n+2} を x_{n+1} と x_n で表せ.

（2） n が 2 以上の整数とするとき，x_n は 4 の倍数であることを示せ.

$\alpha = 3 + \sqrt{7}$, $\beta = 3 - \sqrt{7}$ とし，$x_n = \alpha^n + \beta^n$ とおく．

(1)　x_{n+2} を x_{n+1} と x_n で表せ．

(2)　n が 2 以上の整数とするとき，x_n は 4 の倍数であることを示せ．

【テーマ】：数学的帰納法

方針

(1) では，対称式の式変形を用いて $\{x_n\}$ の漸化式を導きます．(2) は，(1) で導いた式を用いて数学的帰納法で証明をしますが，(1) で導いた式は隣接 3 項間漸化式なので，2 つを仮定 ($n = k$, $k+1$ を仮定) する必要があります．

♣　♠

解答

(1)

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \alpha^{n+2} + \beta^{n+2} \\ &= (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})(\alpha + \beta) - \alpha\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}\beta \\ &= (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^n + \beta^n) \end{aligned}$$

ここで，

$$\alpha + \beta = 3 + \sqrt{7} + 3 - \sqrt{7} = 6$$

$$\alpha\beta = (3 + \sqrt{7})(3 - \sqrt{7}) = 9 - 7 = 2$$

であるから，

$$x_{n+2} = 6(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - 2(\alpha^n + \beta^n) \iff \boldsymbol{x_{n+2} = 6x_{n+1} - 2x_n} \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) **【証明】**

(i) $n = 2$ のとき，

$$x_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 36 - 4 = 32$$

よって，4 の倍数であるから，$n = 2$ のとき成り立つ．

(ii) $n = 3$ のとき，

$$x_3 = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 6^3 - 3 \cdot 2 \cdot 6 = 6(36 - 6) = 180$$

よって，4 の倍数であるから，$n = 3$ のとき成り立つ．

(iii) $n = k$, $k + 1$ ($k \geqq 2$) のとき，x_k, x_{k+1} が 4 の倍数であると仮定すると，

$$x_k = 4l,\ x_{k+1} = 4m \quad (l,\ m \text{ は自然数})$$

とかけて，

$$\begin{aligned} x_{k+2} &= 6x_{k+1} - 2x_k \\ &= 6 \cdot 4m - 2 \cdot 4l \\ &= 4(6m - 2l) \end{aligned}$$

$6m-2l$ は整数であるから，x_{k+2} は 4 の倍数である．ゆえに，$n=k+2$ のときも 4 の倍数である．

以上より，$n \geqq 2$ の自然数 n に対して，x_n は 4 の倍数であることが示された． **【証明終】**

◇ ♡

解説

2 つ仮定する数学的帰納法の問題です．いくつ仮定すればよいかを考えるのは重要で，本問のように隣接 3 項間漸化式であれば，前 2 つが決まらなければ次が決まらないので 2 つの仮定が必要になります．したがって，問題をよく読んで理解し，いくつ仮定すべきかを見抜く力を養っておきましょう．また，本問は数学的帰納法の解法以外にも対称式の式変形の知識が必要になります．(1) では，$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}$ を $\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}$ と $\alpha^n+\beta^n$ で表せと言っているので，まず展開したら $\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}$ が出てくるように $(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})(\alpha+\beta)$ を作ります．あとは，余分な項を引けばよいのです．

次の条件をみたす 4 桁の正の整数 $d_4d_3d_2d_1$ の個数をそれぞれの場合について求めよ．

（1） $9 \geqq d_4 > d_3 > d_2 > d_1 \geqq 0$

（2） $9 \geqq d_4 \geqq d_3 \geqq d_2 \geqq d_1 \geqq 0$

次の条件をみたす 4 桁の正の整数 $d_4d_3d_2d_1$ の個数をそれぞれの場合について求めよ.

(1)　$9 \geqq d_4 > d_3 > d_2 > d_1 \geqq 0$

(2)　$9 \geqq d_4 \geqq d_3 \geqq d_2 \geqq d_1 \geqq 0$

【テーマ】: 4 桁の整数の個数

方針

(1) は, 異なる 4 つの数を選んでくることで, 大小関係が 1 通りに定まることを利用します. (2) では, $d_4 \geqq d_3$ などにある ＝ (イコール) を取り除くことを考えましょう. イコールが取り除ければ, (1) と同じ考え方で解くことができます. ただし, $d_4 \neq 0$ であることに注意する必要があります.

♣　♠

解答

(1)　0〜9 の 10 個の中から異なる 4 個の数を選べば, 大小関係は 1 通りに定まることから, 大きい順に d_4, d_3, d_2, d_1 とすればよいので, 求める個数は,

$${}_{10}\mathrm{C}_4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{210}(\textbf{個})\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)

$$9 \geqq d_4 \geqq d_3 \geqq d_2 \geqq d_1 \geqq 0 \iff 12 \geqq d_4 + 3 > d_3 + 2 > d_2 + 1 > d_1 \geqq 0$$

であり, $d_4 + 3 = D_4,\ d_3 + 2 = D_3,\ d_2 + 1 = D_2$ とおくと,

$$12 \geqq D_4 > D_3 > D_2 > d_1 \geqq 0$$

となる. d_2, d_3, d_4 はそれぞれ D_2, D_3, D_4 と 1 対 1 に対応しているので, (1) と同様に考えればよい.

0〜12 の 13 個の中から異なる 4 個を選べばよいが, このうち $d_1 = 0,\ D_2 = 1,\ D_3 = 2,\ D_4 = 3$ のときは, $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0$ となるので, 条件をみたさない. ゆえに, 求める場合の数は,

$${}_{13}\mathrm{C}_4 - 1 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - 1 = 13 \cdot 55 - 1 = \mathbf{714}(\textbf{個})\cdots\cdots(\text{答})$$

♢　♡

解説

(1) では, 4 つの数がすべて異なっているので, 10 個の中から異なる 4 つの数を選んでくるだけで求めることができます. その際, $d_4 = 0$ となる心配がないので, 最高位の数が 0 になる場合を考える必要はありません.

(2) では, 4 つの数がすべて異なっている訳ではないので, 真面目に場合分けをすると次のように 8 通りしなければいけません.

(i)	$d_4 = d_3 = d_2 = d_1$	(v)	$d_4 > d_3 > d_2 = d_1$
(ii)	$d_4 > d_3 = d_2 = d_1$	(vi)	$d_4 > d_3 = d_2 > d_1$
(iii)	$d_4 = d_3 > d_2 = d_1$	(vii)	$d_4 = d_3 > d_2 > d_1$
(iv)	$d_4 = d_3 = d_2 > d_1$	(viii)	$d_4 > d_3 > d_2 > d_1$

さすがにこれは大変です. そもそも面倒にしている原因は ＝ (イコール) なのですから, これを取り去る方法を考えます.

$d_2 \geqq d_1$ が成り立っているということは，左辺に 1 を加えれば，

$$d_2+1>d_1 \quad \cdots\cdots ①$$

となり，イコールが消えます．同様に，

$$d_4+1>d_3,\ d_3+1>d_2$$

も成り立ちます．これらを一つの不等式にするためには，前者の不等式の両辺に 2 を，後者の不等式の両辺に 1 を加えて，

$$d_4+3>d_3+2,\ d_3+2>d_2+1 \quad \cdots\cdots ②$$

と変形する必要があります．こうすることで，①, ② において d_2+1, d_3+2 という部分で不等式を繋げることができるので，

$$12 \geqq d_4+3>d_3+2>d_2+1>d_1 \geqq 0$$

を得るというわけです．

a, b を実数とする．2 つの関数

$$f(x) = \log(x^2+1), \quad g(x) = ax^2 + b$$

について，次の問いに答えよ．

(1)　関数 $f(x)$ の極値，曲線 $y = f(x)$ の変曲点を求め，そのグラフの概形をかけ．

(2)　曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が共有点をもち，その点における 2 曲線の接線が一致する条件を求めよ．

(3)　(2) の条件において，$a = \dfrac{1}{4}$, $b \fallingdotseq 0$ のとき，この 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

a, b を実数とする．2 つの関数

$$f(x)=\log(x^2+1),\quad g(x)=ax^2+b$$

について，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の極値，曲線 $y=f(x)$ の変曲点を求め，そのグラフの概形をかけ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が共有点をもち，その点における 2 曲線の接線が一致する条件を求めよ．

(3) (2) の条件において，$a=\dfrac{1}{4}$, $b \fallingdotseq 0$ のとき，この 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

【テーマ】：共通接線と面積

方針

2 つの関数 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=t$ において接しているとき，その接点における共通接線を求めるためには，次の 2 つの条件が同時に成り立てばよいことを用います．

$$f(t)=g(t),\quad f'(t)=g'(t)$$

♣ ♠

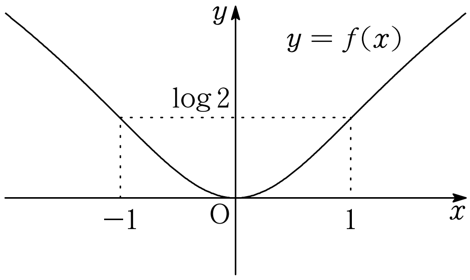
解答

(1) $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ より，$f'(x)=0$ となる x の値は，$x=0$ である．また，

$$f''(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

より，$f''(x)=0$ となる x の値は，$x=\pm 1$ である．ここで，$y=f(x)$ は y 軸に関して対称であるから，$x \geqq 0$ のグラフを考えればよく，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ となることから，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$(+\infty)$
$f'(x)$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	⤴	$\log 2$	⤴	$(+\infty)$



よって，y 軸に関する対称性を考慮にいれると，$y=f(x)$ のグラフは，右上図のようになる．

(2) $y=f(x)$, $y=g(x)$ はともに y 軸に関して対称であるから，$x \geqq 0$ で考える．$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x \geqq 0$ で接するときの接点の x 座標を t $(t \geqq 0)$ とおくと，

$$\begin{cases} f'(t)=g'(t) & \cdots\cdots ① \\ f(t)=g(t) & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

をともにみたす 0 以上の実数 t を求めればよい．

① より，

$$\frac{2t}{t^2+1}=2at \iff 2t=2at(t^2+1) \iff t(at^2+a-1)=0 \cdots\cdots ①'$$

② より，$\log(t^2+1)=at^2+b$ ……②

①′ より，$t=0$ または，$t^2=\dfrac{1-a}{a}$ となる．

（ｉ） $t=0$ のとき，a は任意の実数で，② より，$b=0$ である．

（ii） $t^2=\dfrac{1-a}{a}$ のとき，$t^2>0$ より，$\dfrac{1-a}{a}>0 \iff a(1-a)>0 \iff 0<a<1$ のとき，② から，

$$\log\left(\frac{1-a}{a}+1\right)=a\cdot\frac{1-a}{a}+b \quad\iff\quad b=a+\log\frac{1}{a}-1=a-\log a-1$$

以上より，求める a, b の条件は，

$b=0$ または，$b=a-\log a-1$ $(0<a<1)$……(答)

(3) (2) の条件下で，$a=\dfrac{1}{4}$ のとき，

$$b=\frac{1}{4}-\log\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}+\log 4$$

このとき，接点の x 座標は，

$$t^2=\frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}=3 \text{ より，} t=\sqrt{3}\ (\because\quad t>0)$$

ゆえに，求める面積 S は，y 軸に関する対称性を考慮に入れると，

$$\begin{aligned}
S &= 2\int_0^{\sqrt{3}}\{at^2+b-\log(t^2+1)\}\,dt\\
&= 2\left[\ \frac{1}{3}at^3+bt\ \right]_0^{\sqrt{3}}-2\int_0^{\sqrt{3}}\log(t^2+1)\,dt\\
&= 2(\sqrt{3}a+\sqrt{3}b)-2\left\{\left[\ t\log(t^2+1)\ \right]_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}t\cdot\frac{2t}{t^2+1}\,dt\right\}\\
&= 2\sqrt{3}(a+b)-2\left(\sqrt{3}\log 4\right)+4\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt\\
&= 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+\log 4\right)-2\sqrt{3}\log 4+4\sqrt{3}-4\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{t^2+1}\,dt\\
&= 3\sqrt{3}-4\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{t^2+1}\,dt
\end{aligned}$$

ここで，$t=\tan\theta$ とおくと，$dt=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

よって，

t	0	$\to$	$\sqrt{3}$
θ	0	$\to$	$\dfrac{\pi}{3}$

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{t^2+1}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{\pi}{3}$$

ゆえに，$S=\boldsymbol{3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi}$……**(答)**

◇ ♡

解説

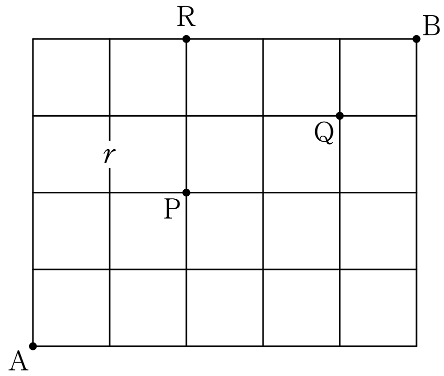
様々な要素が盛り込まれている問題で，微分積分の総合チェックにはもってこいです．(1) はグラフをかく基本的な問題ですが，対称性に気付けば増減表がコンパクトになります．また，$x\to\infty$ における $f(x)$ の極限を求めておくのを忘れないようにしましょう．(2) は，共通接線の問題です．(1) でグラフをかいているので，それをヒントにすれば接線がイメージしやすいでしょう．場合分けを伴うので，注意深く計算する必要があります．$\dfrac{1-a}{a}>0$ を変形する際には，両辺に a をかけてはいけません．これは，a が正か負かが不明だからです．こういうときは，両辺に $a^2>0$ をかけてやれば符号を心配する必要がなくなることを知っておきましょう．(3) は面積計算です．$\displaystyle\int\frac{t^2}{t^2+1}\,dt$ の積分は，$\displaystyle\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt$ と変形し，置換積分法を用いて行います．

右図のような街路があり，A から B へ最短距離で行くとする．
複数の路が出合う地点では，2 つの方向が選べるなら等確率で
進行方向を決める．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　P を通り B へ行く確率を求めよ．

(2)　P か Q の少なくとも一方を通り B へ行く確率を求めよ．

(3)　r の地点が通れなくなったときに，R を通り B へ行く確率を求めよ．

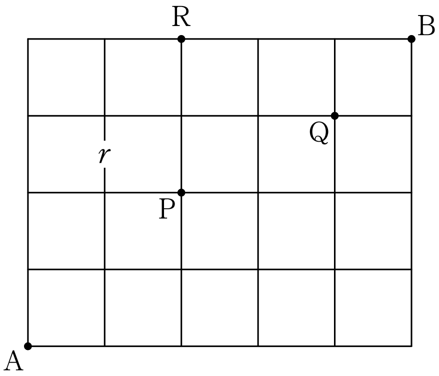


右図のような街路があり，A から B へ最短距離で行くとする．複数の路が出合う地点では，2 つの方向が選べるなら等確率で進行方向を決める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) P を通り B へ行く確率を求めよ．

(2) P か Q の少なくとも一方を通り B へ行く確率を求めよ．

(3) r の地点が通れなくなったときに，R を通り B へ行く確率を求めよ．



【テーマ】：経路の確率

方針

経路の確率を求める際は，何も考えずに $\dfrac{\text{考えている経路の数}}{\text{経路の総数}}$ という計算をしてはいけません．なぜなら，経路の総数一つ一つは同様に確からしくないからです．それは，分岐点では $\dfrac{1}{2}$ の確率で，上か右に進みますが，一番上の路や一番右の路に来たときは，確率 1 で移動することになるからです．この点に十分注意して計算しましょう．

♣ ♠

解答

(1) A から P へ行く場合，右へ 2 回，上へ 2 回移動すればよく，その各々の路はすべて確率 $\dfrac{1}{2}$ で選ぶ．さらに P から B へは必ず辿り着くので，確率は 1 となる．ゆえに，求める確率は，

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 1=6\cdot\frac{1}{16}=\boldsymbol{\frac{3}{8}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2) P を通り B へ行く確率を P_{P}, Q を通り B へ行く確率を P_{Q}, P, Q をともに通り B へ行く確率を P_{PQ} と表すこととする．このとき，(1) より，$P_{\mathrm{P}}=\dfrac{3}{8}$ である．また，(1) と同様に考えることにより，

$$P_{\mathrm{Q}}={}_7\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 1=35\cdot\frac{1}{2^7}=\frac{35}{128}$$

である．さらに，

$$P_{\mathrm{PQ}}=P_{\mathrm{P}}\times{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 1=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}=\frac{9}{64}$$

であるから，求める確率を P とすると，

$$P=P_{\mathrm{P}}+P_{\mathrm{Q}}-P_{\mathrm{PQ}}=\frac{3}{8}+\frac{35}{128}-\frac{9}{64}=\frac{48+35-18}{128}=\boldsymbol{\frac{65}{128}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

となる．

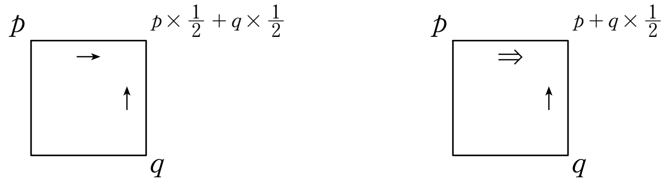
(3) 経路の確率を図にかき入れて計算する．

$\rightarrow$ および $\uparrow$ …… 確率 $\dfrac{1}{2}$ で移動することを表す．

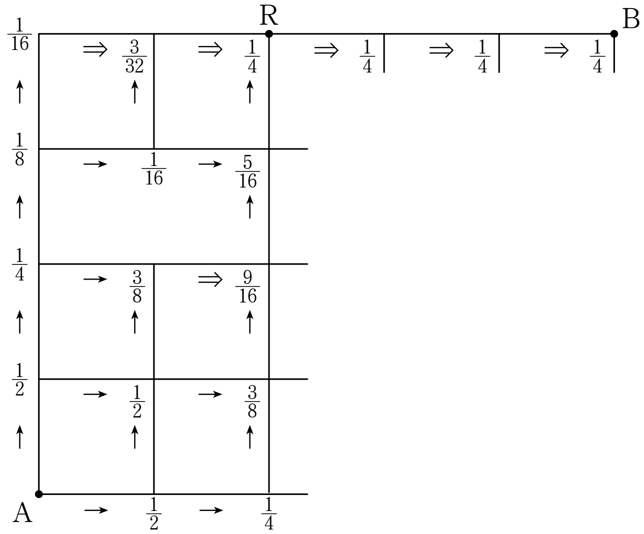
$\Rightarrow$ …… 確率 1 で移動することを表す．

この記号をもとに，次のように計算を行う．ただし，図中の p, q を含む式は交差点に辿り着く確率を表すものとする．

【計算方法】



この計算方法を使って，各交差点に辿り着く確率を計算すると次の図のようになる．ただし，図中の数は交差点に辿り着く確率を表している．



よって，求める確率は $\mathbf{\frac{1}{4}}$……(**答**)

◇ ♡

解説

確率は，$\dfrac{\text{起こりうる場合の数}}{\text{すべての場合の数}}$ で計算できますが，これは『すべての場合の数が同様に確からしい』ときのみできる計算です．方針 でも書いたように，本問では図の『**一番上の路**』と『**一番右の路**』を通る際には，確率 1 で移動するため，このような計算ができなくなります．

(1) は，A から P まで行くとき，図の一番上の路と一番右の路を通ることはないので，すべての路が同様に確からしいことになるので，**解答** のように計算できます．P から B までは必ず到達することから確率は 1 になるため考える必要はありません．(実際に計算してみるとよいでしょう．)

(2) も，(1) と同様に図の一番上の路と一番右の路を通ることはないので，集合の考え方を用いて計算することができます．なお，別解としては，余事象の確率を考えることもできます．P, Q をともに通らない確率を (3) のように図にかき込んで求める方法もありますが，計算間違いをする可能性が高いためあまりお勧めできません．

(3) は，まず計算の方法をしっかりと理解してください．ここで注意しておきたいのは，左から 3 本目の縦の路を上に進む確率は，右にも路が続くので $\dfrac{1}{2}$ となる点です．不要な路を消して考えた人は，この縦の路を上に行く確率を 1 としないように十分注意しましょう．あとは注意深く計算するだけです．

四角形 ABCD が，半径 $\dfrac{65}{8}$ の円に内接している．この四角形の周の長さが 44 で，辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき，残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ．

四角形 ABCD が，半径 $\dfrac{65}{8}$ の円に内接している．この四角形の周の長さが 44 で，辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき，残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ．

【テーマ】：平面図形の計量

方針

何を未知数に置けばよいのかをよく考えて，正弦定理・余弦定理を活用します．いろいろな解法が考えられます．

♣ ♠

解答

AB $= x$ とすると，

$$\mathrm{AD} = 44 - 26 - x = 18 - x$$

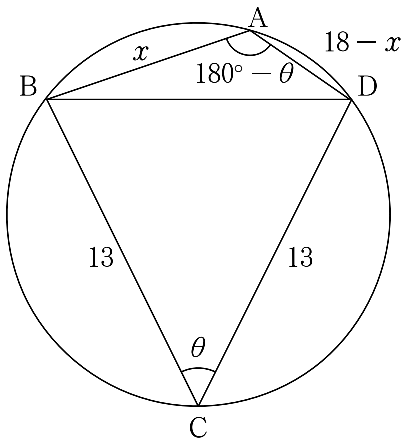
$\angle \mathrm{BCD} = \theta$ とすると，$\triangle$BCD で余弦定理より，

$$\cos\theta = \frac{13^2 + 13^2 - \mathrm{BD}^2}{2 \cdot 13 \cdot 13} = \frac{2 \cdot 13^2 - \mathrm{BD}^2}{2 \cdot 13^2} \cdots\cdots ①$$

また，正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{BD}}{\sin\theta} = 2 \cdot \frac{65}{8} \qquad \therefore\ \mathrm{BD} = \frac{65}{4}\sin\theta \cdots\cdots ②$$

① へ ② を代入して，



$$\cos\theta = \frac{2 \cdot 13^2 - \dfrac{65^2}{16}\sin^2\theta}{2 \cdot 13^2}$$

$$2 \cdot 13^2 \cos\theta = 2 \cdot 13^2 - \frac{65^2}{16}(1 - \cos^2\theta)$$

$$32 \cdot 13^2 \cos\theta = 32 \cdot 13^2 - 65^2(1 - \cos^2\theta)$$

$$32\cos\theta = 32 - 25(1 - \cos^2\theta)$$

$$25\cos^2\theta - 32\cos\theta + 7 = 0$$

$$(25\cos\theta - 7)(\cos\theta - 1) = 0$$

$\cos\theta \neq 1$ であるから，$\cos\theta = \dfrac{7}{25}$

よって，

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{7^2}{25^2}} = \sqrt{\frac{25^2 - 7^2}{25^2}} = \frac{\sqrt{(25-7)(25+7)}}{25} = \frac{\sqrt{18 \cdot 32}}{25} = \frac{24}{25}$$

ゆえに，② から，$\mathrm{BD} = \dfrac{65}{4} \cdot \dfrac{24}{25} = \dfrac{78}{5}$ となる．$\triangle$ABD で余弦定理より，

$$\mathrm{BD}^2 = x^2 + (18 - x)^2 - 2x(18 - x) \cdot \cos(180^\circ - \theta)$$

$$\frac{78^2}{25} = x^2 + 18^2 - 36x + x^2 + 2x(18 - x)\cos\theta \qquad (\because\ \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta)$$

$$78^2 = 50x^2 - 36 \cdot 25x + 18^2 \cdot 25 + 50x(18 - x) \cdot \frac{7}{25}$$

$$78^2 = 50x^2 - 36 \cdot 25x + 18^2 \cdot 25 + 14x(18 - x)$$

$$36x^2 - 648x + 2016 = 0$$

$$x^2 - 18x + 56 = 0$$

$$(x-4)(x-14) = 0 \qquad \therefore\ x = 4,\ 14$$

ゆえに，AB, DA の長さは，**(AB, DA) = (4, 14), (14, 4)**……(答)

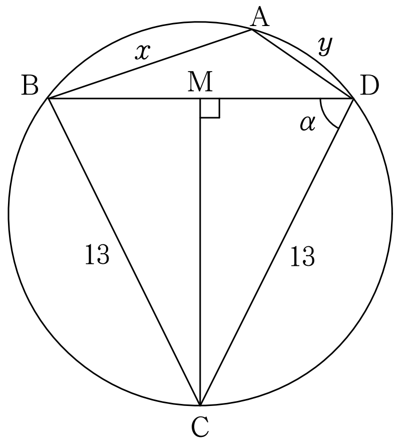
別解

$\angle \mathrm{BDC} = \alpha$ とおく．$\triangle \mathrm{BCD}$ より，正弦定理から，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin\alpha} = 2\cdot\frac{65}{8} \iff \sin\alpha = \frac{13}{\frac{65}{4}} \iff \sin\alpha = \frac{4}{5}$$

となる．辺 BD の中点を M とすると，$\triangle \mathrm{BCD}$ が $\mathrm{BC} = \mathrm{DC}$ の二等辺三角形であることから，$\angle \mathrm{CMD} = 90^\circ$ となるので，$\triangle \mathrm{CMD}$ において，三角比の定義から，

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{DM}}{\mathrm{CD}} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{BD}}{\mathrm{CD}} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{BD}}{13} = \frac{\mathrm{BD}}{26}$$



となる．ここで，

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

より，$\cos\alpha = \frac{3}{5}$ となるので，

$$\mathrm{BD} = 26\cos\alpha = \frac{78}{5}$$

を得る．

また，$\mathrm{AB} = x$, $\mathrm{AD} = y$ とおくと，周の長さが 44 であることから，

$$x + y = 18 \cdots\cdots①$$

が成り立つ．さらに，円周角の定理より，$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{BDC} + \angle \mathrm{DBC} = 2\alpha$ が成り立つので，

$$\cos\angle \mathrm{BAD} = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{9}{25} - 1 = -\frac{7}{25}$$

よって，$\triangle \mathrm{ABD}$ で余弦定理より，

$$\mathrm{BD}^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cdot\cos\angle \mathrm{BAD} \iff \frac{78^2}{25} = (x+y)^2 - 2xy - 2xy\cdot\left(-\frac{7}{25}\right)$$

$$\iff 78^2 = 25\cdot 18^2 - 50xy + 14xy \qquad \iff 36xy = 90^2 - 78^2$$

$$\iff 36xy = 12\cdot 168 \qquad \iff xy = 56 \cdots\cdots②$$

よって，①, ② より，x, y を 2 解にもつ 2 次方程式は，解と係数の関係より，

$$t^2 - 18t + 56 = 0 \iff (t-14)(t-4) = 0 \qquad \therefore\ t = 4,\ 14$$

ゆえに，AB, DA の長さは，**(AB, DA) = (4, 14), (14, 4)**……(答)

◇ ♡

解説

与えられている情報が少ないので，自分でいくつかの変数を設定する必要があります．あとは，定理や公式を使って方程式を求め解くという作業をすることになりますが，本問の解答のように，計算の過程で数字が大きくなってしまう可能性もあります．このようなときは，むやみに計算せず掛け算の状態で放置しつつ計算するというのも計算のテクニックとして非常に重要です．このような計算ができるようになれば，計算力がつきますので，むやみに大きな数を計算するのはやめましょう．別解 中の余弦定理内の計算では，$90^2 - 78^2 = (90-78)(90+78) = 12\cdot 168$ のように数字で因数分解を利用して計算しています．大きな数字の計算では，このような計算テクニックも使えるようになっておく必要があります．

次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

$$a_1 = 7,\ a_{n+1} = \frac{7a_n + 3}{a_n + 5} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

（1） $b_n = a_n - k$ とおくとき，$b_{n+1} = \dfrac{\alpha b_n}{b_n + \beta}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となるような定数 k, α, β をみつけよ．ただし $k>0$ とする．

（2） $c_n = \dfrac{1}{b_n}$ とおく．数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

（3） 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．さらに，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

$$a_1=7,\ a_{n+1}=\frac{7a_n+3}{a_n+5}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　$b_n=a_n-k$ とおくとき，$b_{n+1}=\dfrac{\alpha b_n}{b_n+\beta}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となるような定数 $k,\ \alpha,\ \beta$ をみつけよ．ただし $k>0$ とする．

(2)　$c_n=\dfrac{1}{b_n}$ とおく．数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(3)　数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．さらに，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

【テーマ】：隣接２項間漸化式

方針

$a_n=$ の形に変形して，与えられた漸化式に代入します．あとは，$\{b_n\}$ の漸化式が出てくるので，係数比較をして $\alpha,\ \beta$ の値を決定します．

分数型の隣接 2 項間漸化式です．もしも分子が pa_n の形になっていれば逆数をとればよいのですが，本問のように分子が pa_n+q $(q\fallingdotseq 0)$ の形になっているときは逆数をとっても解けません．しかし，このような問題では小問で誘導されていることが多いため，解答の流れを経験しておけば十分でしょう．

♣　♠

解答

(1)　$a_n=b_n+k$ より，与えられた漸化式に代入して，

$$\begin{aligned} b_{n+1}+k &= \frac{7(b_n+k)+3}{b_n+k+5} \\ b_{n+1} &= \frac{7b_n+7k+3-k(b_n+k+5)}{b_n+k+5} \\ &= \frac{7b_n+7k+3-kb_n-k^2-5k}{b_n+k+5} \\ &= \frac{(7-k)b_n-k^2+2k+3}{b_n+k+5} \end{aligned}$$

よって，係数を比較して，

$$\begin{cases} 7-k=\alpha & \cdots\cdots ① \\ k+5=\beta & \cdots\cdots ② \\ -k^2+2k+3=0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

がすべて成り立てばよい．③ より，

$$k^2-2k-3=0 \iff (k-3)(k+1)=0 \quad \therefore\ k=-1,\ 3$$

$k>0$ より，$k=3$ であるから，このとき，①, ② より，

$$\boldsymbol{k=3,\ \alpha=4,\ \beta=8}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　(1) より，

$$b_{n+1}=\frac{4b_n}{b_n+8},\quad b_1=a_1-3=4$$

であるから，$b_n>0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$．よって，両辺の逆数をとると，

$$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{b_n+8}{4b_n} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{b_{n+1}}=2\frac{1}{b_n}+\frac{1}{4}$$

$c_n=\dfrac{1}{b_n}$ より，

$$c_{n+1}=2c_n+\frac{1}{4} \quad\Longleftrightarrow\quad c_{n+1}+\frac{1}{4}=2\left(c_n+\frac{1}{4}\right)$$

よって，数列 $\left\{c_n+\dfrac{1}{4}\right\}$ は，初項 $c_1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$ ，公比 2 の等比数列であるから，

$$c_n+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1} \quad\Longleftrightarrow\quad \boldsymbol{c_n=\frac{1}{4}(2^n-1)}\cdots\cdots(\text{答})$$

(3) (2) より，

$$b_n=\frac{1}{c_n}=\frac{4}{2^n-1}$$

であり，(1) から，

$$\begin{aligned} a_n &= b_n+3 \\ &= \frac{4}{2^n-1}+3 \\ &= \boldsymbol{\frac{3\cdot 2^n+1}{2^n-1}}\cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

◇ ♡

解説

小問で丁寧に誘導しているので，非常に解きやすく解答の流れがわかりやすい問題です．志望校の過去問を研究する際は誘導が丁寧かどうかまで調べておきましょう．もしも誘導が丁寧ならよいのですが，誘導が無い問題が多く出題されている大学であれば，自分で小問を補わなければならないので，本問のように複雑な場合は解答の流れまでしっかりと理解しておく必要があります．

次の関係式をみたす関数 $f(x)$ がある．

$$\int_0^x f(t)\,dt = f(x) + 1 + \int_{-x}^x f(t)\,dt$$

(1)　$f(0)$, $f'(0)$ の値を求めよ．

(2)　a, b を実数とし，$f(x)$ が $f(x) = e^x(a\sin x + b\cos x)$ の形で与えられるとき，a, b の値を求めよ．

(3)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx + 1$ を示せ．

(4)　$f(x)$ が (2) で定めた関数のとき，不等式

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\ ,\ \ y \geqq -1\ ,\ \ y \leqq f(x)$$

によって表される領域を D とする．D の面積 S を求めよ．

次の関係式をみたす関数 $f(x)$ がある．

$$\int_0^x f(t)\,dt = f(x) + 1 + \int_{-x}^x f(t)\,dt$$

（1） $f(0)$, $f'(0)$ の値を求めよ．

（2） a, b を実数とし，$f(x)$ が $f(x) = e^x(a\sin x + b\cos x)$ の形で与えられるとき，a, b の値を求めよ．

（3） $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx + 1$ を示せ．

（4） $f(x)$ が (2) で定めた関数のとき，不等式

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\ ,\ \ y \geqq -1\ ,\ \ y \leqq f(x)$$

によって表される領域を D とする．D の面積 S を求めよ．

【テーマ】：積分方程式・面積計算

方針

与えられた積分方程式から $f(0)$ の値を求めるためには，$x = 0$ を代入します．また，$f'(0)$ を求めるためには，両辺を x で微分してから $x = 0$ を代入します．本問は，前問の結果を使って次の設問を解答しなければならなくなるため，慎重に計算をしましょう．

♣ ♠

解答

（1） 与えられた式に $x = 0$ を代入すると，

$$\int_0^0 f(t)\,dt = f(0) + 1 + \int_0^0 f(t)\,dt \quad \therefore\ \boldsymbol{f(0) = -1}\cdots\cdots(答)$$

次に，与えられた式の両辺を x で微分すると， ☞ 公 式

$$f(x) = f'(x) + f(x) - f(-x)\cdot(-1) \quad \Longleftrightarrow \quad f'(x) = -f(-x)$$

この式に，$x = 0$ を代入して，

$$f'(0) = -f(0) = 1 \quad \therefore\ \boldsymbol{f'(0) = 1}\cdots\cdots(答)$$

（2） $f'(x) = e^x(a\sin x + b\cos x) + e^x(a\cos x - b\sin x) = e^x\{(a-b)\sin x + (a+b)\cos x\}$ であり，

$$f(0) = b,\ f'(0) = a + b$$

であるから，(1) の結果より，

$$\begin{cases} b = -1 \\ a + b = 1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{a = 2} \\ \boldsymbol{b = -1} \end{cases} \cdots\cdots(答)$$

（3） **【証明】**

部分積分法で計算すると，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx = \Big[\, e^x(-\cos x) \,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx + 1$$

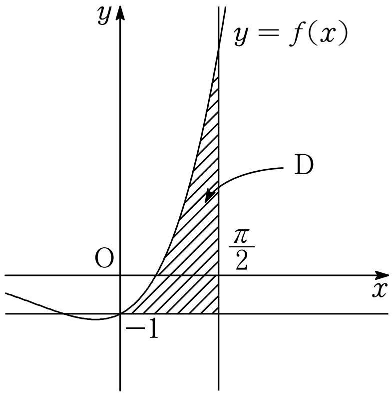
よって，示された． （証明終）……（答）

(4) (2) より，

$$f(x) = e^x(2\sin x - \cos x),\ f'(x) = e^x(3\sin x + \cos x)$$

であるから，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $f'(x) > 0$ となるので，$y = f(x)$ はこの区間で単調増加である．

よって，領域 D を図示すると図の斜線部分（境界線上の点を含む）となる．したがって，求める面積 S は，



$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x) - (-1)\}\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{e^x(2\sin x - \cos x) + 1\}\,dx \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx + \frac{\pi}{2} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx + 2 + \frac{\pi}{2} \quad (\because\ (3)) \end{aligned}$$

で表される．ここで，$I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx$ とおくと，

$$\begin{aligned} I &= \Big[\,e^x \cos x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(-\sin x)\,dx \\ &= -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx \\ &= -1 + \Big[\,e^x \sin x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx \\ &= -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - I \end{aligned}$$

したがって，

$$2I = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \iff I = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$$

ゆえに，求める面積 S は，

$$S = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2} + 2 + \frac{\pi}{2} \iff \boldsymbol{S = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + \pi + 3}{2}} \cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

誘導が丁寧なので，比較的解きやすい問題です．しかし，前問の結果を使うので計算間違いは命取りです．正確な計算力が要求されています．また，(4) では，簡単なグラフをかいてから面積を計算しましょう．(3) の結果を用いれば計算量を減らすことができるので，少し楽になります．

公 式 **【微分と積分の関係】**

a を定数．x は t に無関係な変数．$f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ は連続で微分可能な関数とする．

(i) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$

(ii) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$

次の問いに答えよ．

（1） 点 $(3,\,3)$ における円 $x^2+y^2-4x-2y=0$ の接線の方程式を求めよ．

（2） 次の連立不等式の表す領域を図示せよ．

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(2x-3) \geqq \log_{\frac{1}{2}} y \\ \log_2(x^2+y^2-4x-2y+5) \leqq \log_2 5 \end{cases}$$

（3） a を正の数とする．点 $(x,\,y)$ が (2) で求めた領域を動くとき，$ax+y$ の最大値が 4 になるように a の値を定めよ．

次の問いに答えよ.

(1) 点 $(3, 3)$ における円 $x^2+y^2-4x-2y=0$ の接線の方程式を求めよ.

(2) 次の連立不等式の表す領域を図示せよ.

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(2x-3) \geqq \log_{\frac{1}{2}} y \\ \log_2(x^2+y^2-4x-2y+5) \leqq \log_2 5 \end{cases}$$

(3) a を正の数とする. 点 (x, y) が (2) で求めた領域を動くとき, $ax+y$ の最大値が 4 になるように a の値を定めよ.

【テーマ】:領域と最大・最小

方針

対数を見かけたらまずは, 底の条件と真数条件を調べましょう. 本問では, 底に文字が含まれていないので真数条件のみを調べれば十分です. その条件のもとで図示する必要があります. (1) がヒントになっているので, どのように利用するかをよく考えてみましょう.

♣ ♠

解答

(1) $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ より, 点 $(3, 3)$ における接線の方程式は,

$$(3-2)(x-2)+(3-1)(y-1)=5 \iff \boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}} \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

(2) 真数条件より,

$$2x-3>0 \text{ かつ } y>0 \text{ かつ } x^2+y^2-4x-2y+5>0$$

すなわち

$$x>\frac{3}{2},\ y>0,\ (x-2)^2+(y-1)^2>0$$

よって, $x>\frac{3}{2},\ y>0,\ x \fallingdotseq 2$ かつ $y \fallingdotseq 1 \cdots ①$

$\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) \geqq \log_{\frac{1}{2}} y$ において, 底は $\frac{1}{2}$ で 1 より小さいので,

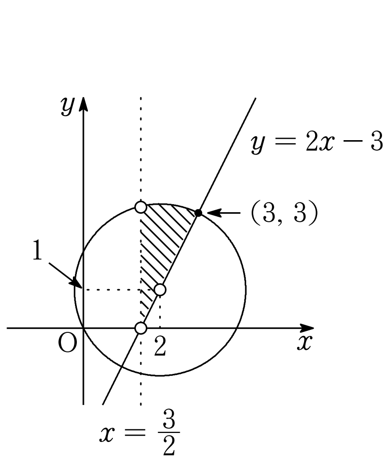
$$y \geqq 2x-3 \cdots ②$$

$\log_2(x^2+y^2-4x-2y+5) \leqq \log_2 5$ において, 底は 2 で 1 より大きいので,

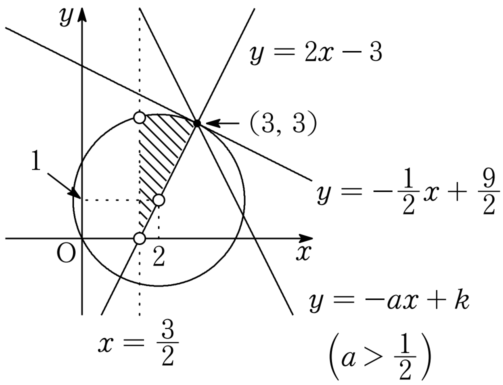
$$x^2+y^2-4x-2y+5 \leqq 5$$

$$\iff (x-2)^2+(y-1)^2 \leqq 5$$

よって, 求める領域は右図の斜線部分で $x=\frac{3}{2}$ 上の点と点 $(2, 1)$ を除く.



(3)　$ax+y=k$ とおくと，$y=-ax+k$ となる．



（ｉ）(1) から，$-a<-\dfrac{1}{2}$ すなわち $a>\dfrac{1}{2}$ のとき，

$x=y=3$ で k は最大となり，このとき，

$$k=3a+3=4 \quad \Longleftrightarrow \quad a=\frac{1}{3}$$

これは $a>\dfrac{1}{2}$ に反するので不適.

（ii）$0<a<\dfrac{1}{2}$ のとき，

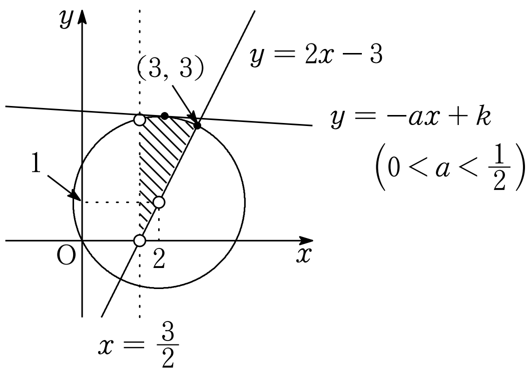
(2) で求めた領域の円弧の部分で $y=-ax+k$ が接するとき k は最大となる．このとき，円の中心と直線までの距離が円の半径に等しくなるので，

$$\frac{|-2a-1+k|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{5}$$

であり，$k=4$ を代入すると，

$$\frac{|-2a-1+4|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{5}$$

$$\Longleftrightarrow \quad |-2a+3|=\sqrt{5(a^2+1)}$$



両辺 2 乗して，整理すると，

$$4a^2-12a+9=5a^2+5$$

$$\Longleftrightarrow \quad a^2+12a-4=0 \qquad \therefore \quad a=-6\pm2\sqrt{10}$$

$0<a<\dfrac{1}{2}$ より，$a=-6+2\sqrt{10}$ である.

ゆえに，（ｉ），（ii）より，求める a の値は，$\boldsymbol{a=-6+2\sqrt{10}}$……(答)

◊　♡

解説

領域図示と領域内の $(x,\ y)$ に対する式の値の最大値を求める典型的な問題です．$ax+y=k$ とおいて，この式を直線とみなし，切片 k の値が最大になる場合を考えます．このとき，傾きに文字を含むので場合分けが必要であることを理解しましょう．また，(1) でヒントが与えられているので，比較的解答がスムーズに作成できます.

二等辺三角形 OAB において，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = 3$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 2$，$\cos\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{1}{3}$ とする．OA を $s:(1-s)$ に内分する点を D とし，OB を $t:(1-t)$ に内分する点を E とする．さらに，AB の中点を F とし，OF と DE の交点を G とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right| : \left|\overrightarrow{\mathrm{GF}}\right| = a:(1-a)$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{DG}}\right| : \left|\overrightarrow{\mathrm{GE}}\right| = b:(1-b)$ とおくとき，a と b を s と t を用いて表せ．

(2)　線分 DE の長さ L を s と t を用いて表せ．

(3)　点 D と E は，それぞれ OA と OB 上を，線分 DE が三角形 OAB の面積を二等分するように動くとする．このとき，t を s を用いて表せ．さらに，線分 DE の長さ L の最小値を求めよ．

二等辺三角形 OAB において，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = 3$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 2$，$\cos\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{1}{3}$ とする．OA を $s:(1-s)$ に内分する点を D とし，OB を $t:(1-t)$ に内分する点を E とする．さらに，AB の中点を F とし，OF と DE の交点を G とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right| : \left|\overrightarrow{\mathrm{GF}}\right| = a:(1-a)$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{DG}}\right| : \left|\overrightarrow{\mathrm{GE}}\right| = b:(1-b)$ とおくとき，a と b を s と t を用いて表せ．

(2)　線分 DE の長さ L を s と t を用いて表せ．

(3)　点 D と E は，それぞれ OA と OB 上を，線分 DE が三角形 OAB の面積を二等分するように動くとする．このとき，t を s を用いて表せ．さらに，線分 DE の長さ L の最小値を求めよ．

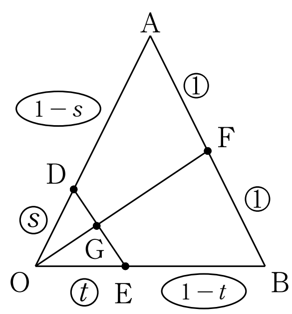
【テーマ】：線分比と面積の最小値

方針

前半は，内分の公式を利用して計算します．(3) は (2) で求めた L と (3) で求めた s, t の関係式を利用して 1 文字消去して相加平均・相乗平均の関係を用います．

解答

(1)　点 F は線分 AB の中点であり，OG : GF ＝ $a:(1-a)$ より，



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= a\overrightarrow{\mathrm{OF}}\\ &= a\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}\\ &= \frac{a}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{a}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

また，△ODE で，DG : GE ＝ $b:(1-b)$ より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= (1-b)\overrightarrow{\mathrm{OD}}+b\overrightarrow{\mathrm{OE}}\\ &= (1-b)s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+bt\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立であるから，

$$\begin{cases}\dfrac{a}{2} = (1-b)s & \cdots\cdots ①\\[2mm] \dfrac{a}{2} = bt & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

①, ② より，

$$bt = (1-b)s \iff bt+bs = s \iff b = \frac{s}{s+t}$$

であり，② より，

$$\frac{a}{2} = \frac{st}{s+t} \iff a = \frac{2st}{s+t}$$

ゆえに，$\boldsymbol{a = \dfrac{2st}{s+t}}$，$\boldsymbol{b = \dfrac{s}{s+t}}$ ……(答)

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ であるから，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|t\overrightarrow{\mathrm{OB}} - s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 \\
&= t^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 - 2st\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + s^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 \\
&= 4t^2 - 2st\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\angle\mathrm{AOB} + 9s^2 \\
&= 4t^2 - 2st\cdot 3\cdot 2\cdot \frac{1}{3} + 9s^2 \\
&= 4t^2 - 4st + 9s^2
\end{aligned}
$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right| > 0$ より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right| = L = \boldsymbol{\sqrt{4t^2 - 4st + 9s^2}}$……(**答**)

(3)　$\triangle\mathrm{OAB}$, $\triangle\mathrm{ODE}$ の面積は，それぞれ

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\sin\angle\mathrm{AOB}$$

$$\triangle\mathrm{ODE} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OE}}\right|\sin\angle\mathrm{AOB} = \frac{1}{2}st\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\sin\angle\mathrm{AOB}$$

であり，条件より，$\triangle\mathrm{OAB} = 2\triangle\mathrm{ODE}$ であるから，

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\sin\angle\mathrm{AOB} = 2\cdot\frac{1}{2}st\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\sin\angle\mathrm{AOB} \iff st = \frac{1}{2} \cdots\cdots ③$$

よって，$t = \dfrac{1}{2s}$（$\because$　$s \neq 0$）となるので，(2) で求めた L に代入すると，

$$L = \sqrt{4\cdot\frac{1}{4s^2} - 4s\cdot\frac{1}{2s} + 9s^2} = \sqrt{9s^2 + \frac{1}{s^2} - 2}$$

となる．$s^2 > 0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係より，

$$9s^2 + \frac{1}{s^2} \geqq 2\sqrt{9s^2\cdot\frac{1}{s^2}} = 6$$

等号は，$9s^2 = \dfrac{1}{s^2}$ すなわち $s = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$（$\because$　③）のとき，成立する．よって，

$9s^2 + \dfrac{1}{s^2} - 2 \geqq 4$ が成り立ち，$\sqrt{9s^2 + \dfrac{1}{s^2} - 2} \geqq 2$ となるので，$L \geqq 2$

を得る．ゆえに，$s = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，L の最小値は **2**……(**答**) である．

◇　　　　　♡

解説

(3) のように，三角形の面積を二等分するときの線分 DE の長さの最小値を求める問題は，様々な大学で類題が出題されています．　最小値を求めるときに『相加平均・相乗平均の関係』を用いることがポイントになります．

次の極限値を求めよ．ただし，n は自然数とする．

（1）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{[a]^n}{[a^n]}$　$(a \geqq 1)$

（2）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n})$　$(a>0)$

（3）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{3}\right]}\right)$

次の極限値を求めよ．ただし，n は自然数とする．

（1）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{[a]^n}{[a^n]}$　$(a \geqq 1)$

（2）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n})$　$(a>0)$

（3）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{3}\right]}\right)$

【テーマ】：数列の極限・関数の極限

方針

(1) は，a が整数か整数でないかで極限値が変わってくるので，場合分けを行います．a が整数でないときは，$[a]^n$ は a^n に比べてゴミみたいな物（凄く小さいという意味）であるという発想が必要です．
(2) は，a が 1 より大きいか否かで場合分けを行います．このときも，$a>1$ であれば，a^n は a^{2n} に比べてゴミみたいな物です．
(3) は，ガウス記号をどのように処理するかがポイントです．$\dfrac{n}{3}$ の小数部分を α として，ガウス記号をはずしましょう．あとは，$\sqrt{n^2+\left[\dfrac{n}{3}\right]}$ の極限ですが，このままでは計算できないので，まず $\sqrt{n^2+\left[\dfrac{n}{3}\right]}-n$ の極限を考えます．なぜなら，n が十分大きいときは，$\sqrt{n^2+a} \fallingdotseq n$ となるので，不定形を作ろうという発想です．

♣　♠

解答

(1)

（ｉ）　a が整数のとき，$[a]^n=[a^n]$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{[a]^n}{[a^n]}=1$

（ii）　a が整数ではないとき，a の整数部分を A すなわち $[a]=A$ とおく．
ここで，一般に実数 x に対して，$[x] \leqq x < [x]+1$ が成り立つので，

$[x]>x-1$ であり，$[x]$ と $x-1$ が同符号であれば，$\dfrac{1}{[x]}<\dfrac{1}{x-1}$

が成り立つ．したがって，

$$0 \leqq \frac{[a]^n}{[a^n]} < \frac{A^n}{a^n-1}=\frac{\left(\dfrac{A}{a}\right)^n}{1-\dfrac{1}{a^n}}$$

となり，$\dfrac{A}{a}$ は 1 より小さい正の数で，$a>1$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{A}{a}\right)^n}{1-\dfrac{1}{a^n}}=0$ となる．

よって，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{[a]^n}{[a^n]}=0$

以上より，求める極限値は，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[a]^n}{[a^n]}=\begin{cases}\mathbf{1}　\textbf{（}\boldsymbol{a}\textbf{ が整数）}\\ \mathbf{0}　\textbf{（}\boldsymbol{a}\textbf{ が整数でない）}\end{cases}$$ ……（答）

(2)

（ｉ）　$0<a \leqq 1$ のとき，$0<a^{2n} \leqq a^n$ であるから，

$$\log(a^n+a^{2n}) \leqq \log 2a^n = \log 2 + n\log a\ ,\quad \log(a^n+a^{2n}) > \log a^n = n\log a$$

となるので，

$$n\log a < \log(a^n+a^{2n}) \leqq \log 2 + n\log a \quad\Longleftrightarrow\quad \log a \leqq \frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n}) \leqq \frac{\log 2}{n} + \log a$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log 2}{n}+\log a\right) = \log a$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n}) = \log a$$

（ii） $a>1$ のとき，$a^{2n} \geqq a^n > 0$ であるから，

$$\log a^{2n} < \log(a^n+a^{2n}) \leqq \log 2a^{2n} \quad\Longleftrightarrow\quad 2n\log a < \log(a^n+a^{2n}) \leqq \log 2 + 2n\log a$$

$$2\log a < \frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n}) \leqq \frac{\log 2}{n} + 2\log a$$

となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log 2}{n}+2\log a\right) = 2\log a$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n}) = 2\log a$$

以上より，求める極限値は，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n}) = \begin{cases} \boldsymbol{\log a} & \boldsymbol{(0<a\leqq 1)} \\ \boldsymbol{2\log a} & \boldsymbol{(a>1)} \end{cases} \quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　$\dfrac{n}{3}$ の小数部分を α $(0 \leqq \alpha < 1)$ とおくと，

$$\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{3}\right]}-n = \sqrt{n^2+\frac{n}{3}-\alpha}-n = \frac{n^2+\frac{n}{3}-\alpha-n^2}{\sqrt{n^2+\frac{n}{3}-\alpha}+\left(n+\frac{1}{6}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{3n}-\frac{\alpha}{n}}+1} \ \to\ \frac{1}{6}\quad(n\to\infty)$$

ここで，n が自然数のとき，加法定理を用いると，

$$\sin 2\pi\left(\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{3}\right]}-n\right) = \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{3}\right]}\right)\cos 2n\pi - \cos\left(2\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{3}\right]}\right)\sin 2n\pi$$

$$= \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{3}\right]}\right)$$

が成り立つので，求める極限値は，

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{3}\right]}\right) = \lim_{n\to\infty}\sin 2\pi\left(\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{3}\right]}-n\right) = \sin\left(2\pi\times\frac{1}{6}\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdots\cdots(\text{答})$$

◇　　♡

解説

(1), (2) は，$n\to\infty$ のとき，r^n の極限値を計算する際は，r が 1 より大きいかどうかに注意する必要があるということを思い出しましょう．

(3) は難問です．まずガウス記号をどのように処理するかという問題と，極限値をどのように計算すればよいかを考えるのに非常に時間を費やすと思います．方針 でも述べているように，n が十分大きいときは，$\sqrt{n^2+a} \fallingdotseq n$ となるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{3}\right]}-n\right)$ のように不定形にして極限を計算します．あとは，加法定理を利用すれば問題の形と同じになることが示されるので，めでたく極限値が計算できるというわけです．

【問題】

△ABC において，角と辺の間に，

$$\sin A : \sin B = \sqrt{2} : 1, \quad \overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 + \sqrt{2}\,\overline{\mathrm{AB}} \cdot \overline{\mathrm{AC}}$$

なる関係があるとき，角 A, B, C はそれぞれ何度か.

△ABC において，角と辺の間に，

$$\sin A : \sin B = \sqrt{2} : 1,\quad \overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 + \sqrt{2}\,\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}$$

なる関係があるとき，角 A, B, C はそれぞれ何度か．

【テーマ】：正弦定理・余弦定理

方針

第 1 式を正弦定理で辺の比に直します．次に第 2 式と余弦定理を使って，3 つの角のうち一つを決定します．

♣ ♠

解答

BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$ とする．正弦定理より，

$\sin A : \sin B = a : b$ であるから，$a : b = \sqrt{2} : 1$ すなわち $a = \sqrt{2}b$ ……①

が成り立つ．次に，

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 + \sqrt{2}\,\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}} \iff c^2 = b^2 + \sqrt{2}cb \text{ ……②}$$

であり，余弦定理より，

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

が成り立つので，この式に ①, ② を代入して，

$$2b^2 = b^2 + b^2 + \sqrt{2}bc - 2bc\cos A \iff \sqrt{2}bc = 2bc\cos A$$

$$\iff \cos A = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\because\ bc \neq 0)$$

よって，$A = 45^\circ$ が得られる．また，

$$\sin A : \sin B = \sqrt{2} : 1 \iff \sin A = \sqrt{2}\sin B \iff \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\sin B$$

より，$\sin B = \dfrac{1}{2}$ となり，$A = 45^\circ$ であるから，$0^\circ < B < 135^\circ$ をみたす．これより $B = 30^\circ$ を得る．

したがって，

$$C = 180^\circ - (45^\circ - 30^\circ) = 105^\circ$$

となるので，求める角の大きさは，

$\boldsymbol{A = 45^\circ, B = 30^\circ, C = 105^\circ}$……(答)

別解

② 以降の別解です．

② から $c > b > 0$ が成り立ち，② の両辺を $b^2 \neq 0$ で割ると，

$$\left(\frac{c}{b}\right)^2 = 1 + \sqrt{2}\cdot\frac{c}{b} \iff \left(\frac{c}{b}\right)^2 - \sqrt{2}\cdot\frac{c}{b} - 1 = 0$$

となるので，解の公式でこれを解くと，$\dfrac{c}{b} = \dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$ を得るが，$\dfrac{c}{b} > 0$ より，

$$\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \iff c = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}b \text{ ……③}$$

余弦定理より，

$$
\begin{aligned}
\cos B &= \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\
&= \frac{\frac{8+4\sqrt{3}}{4}b^2+2b^2-b^2}{(\sqrt{2}+\sqrt{6})b\cdot\sqrt{2}b} \quad (\because \ ①, ③) \\
&= \frac{3+\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})} \\
&= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2(1+\sqrt{3})} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

よって，$B=30^\circ$（$\because \ 0^\circ < B < 180^\circ$）を得る．さらに，

$$\sin A : \sin B = \sqrt{2} : 1 \iff \sin A = \sqrt{2}\sin B \iff \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

より，$A=45^\circ$ または $A=135^\circ$ を得る．

$A=45^\circ$ のとき，$C=105^\circ$ であり，$A=135^\circ$ のとき，$C=15^\circ$ である．

ここで，$c>b$ より，$C>B$ となるので，求める角の大きさは，

$A=45^\circ$, $B=30^\circ$, $C=105^\circ$……(答)

◇ ♡

解説

比較的方針が立てやすく，計算量も少ないので完答したい問題です．ただし，別解 のように B を先に求めると，A と C が 2 組出てくるため，どちらか一つに絞る必要が出てきます．そのためには，

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 + \sqrt{2}\,\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}$$

から $c>b$ すなわち，$C>B$ となることを見抜かなければいけなくなります．これは，次のようにして証明します．

$$c^2=b^2+\sqrt{2}bc \iff c^2-b^2=\sqrt{2}bc \iff (c-b)(c+b)=\sqrt{2}bc$$

ここで，$b+c>0$, $\sqrt{2}bc>0$ であるから，$c-b>0$ すなわち $c>b$ が示されます．

【問題】

座標空間における 3 点 $\mathrm{A}(4,\ -1,\ 2)$, $\mathrm{B}(2,\ 2,\ 3)$, $\mathrm{C}(5,\ -4,\ 0)$ を頂点とする三角形の外心の座標を求めよ.

座標空間における 3 点 $A(4,\ -1,\ 2)$, $B(2,\ 2,\ 3)$, $C(5,\ -4,\ 0)$ を頂点とする三角形の外心の座標を求めよ.

【テーマ】：外心の座標

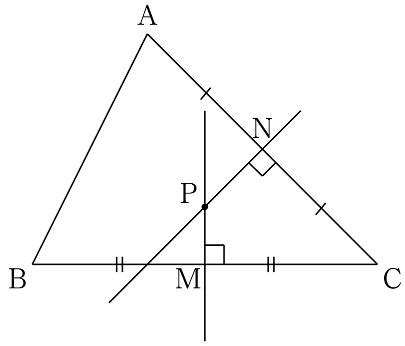
方針

外心は，三角形の各辺の垂直二等分線の交点です．外心の座標を $(x,\ y,\ z)$ として，内積を利用して計算します．

♣ ♠

解答

外心を P, BC, AC の中点をそれぞれ M, N とすると，



$$\mathrm{PM}\perp\mathrm{BC} \text{ かつ } \mathrm{PN}\perp\mathrm{AC}$$

である．ここで，$P(x,\ y,\ z)$ とおくと，

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{PM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0 & \cdots\cdots① \\ \overrightarrow{\mathrm{PN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

また，P は 3 点 A, B, C と同一平面上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ \cdots\cdots③$$

とおくことができる．$M\left(\frac{7}{2},\ -1,\ \frac{3}{2}\right)$, $N\left(\frac{9}{2},\ -\frac{5}{2},\ 1\right)$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\left(\frac{7}{2}-x,\ -1-y,\ \frac{3}{2}-z\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{PN}}=\left(\frac{9}{2}-x,\ -\frac{5}{2}-y,\ 1-z\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(3,\ -6,\ -3),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ -3,\ -2),\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ 3,\ 1)$$

よって，① より，

$$3\left(\frac{7}{2}-x\right)-6(-1-y)-3\left(\frac{3}{2}-z\right)=0 \iff x-2y-z=4\ \cdots\cdots④$$

また，② より，

$$\frac{9}{2}-x-3\left(-\frac{5}{2}-y\right)-2(1-z)=0 \iff x-3y-2z=10\ \cdots\cdots⑤$$

③ より，

$$(x-4,\ y+1,\ z-2)=s(-2,\ 3,\ 1)+t(1,\ -3,\ -2)$$

$$\iff \begin{cases} x-4=-2s+t \\ y+1=3s-3t \\ z-2=s-2t \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2s+t+4 \\ y=3s-3t-1 \\ z=s-2t+2 \end{cases} \cdots\cdots(*)$$

これを ④, ⑤ へ代入して，

$$④ \iff -2s+t+4-2(3s-3t-1)-(s-2t+2)=4 \iff s=t$$

$$⑤ \iff -2s+t+4-3(3s-3t-1)-2(s-2t+2)=10 \iff 13s-14t+7=0$$

これより，$s=7$, $t=7$ を得る．よって，$(*)$ より $x=-3$, $y=-1$, $z=-5$ となるので，外心の座標は，

$(-3,\ -1,\ -5)$ $\cdots\cdots$(答)

◇ ♡

解説

三角形の外心は，三角形の各辺の垂直二等分線の交点になります．ただし，3 本の垂直二等分線は，必ず 1 点で交わるため，2 本を考えれば十分です．あとは，内積の計算を地道にするだけで答えを得ることができます．基本的な計算なので，計算間違いのないように十分注意しましょう．

平面上で原点 O と異なる定点を A$(a,\ b)$ とする．点 P$(x,\ y)$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ へはかった角 θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ となる範囲にあるものとし，$w=\dfrac{ay-bx}{ax+by}$ とおく．2 点 X, Y の間の距離を XY で表すものとする．

(1)　$ay-bx$ および w を OA, OP, θ で表せ．

(2)　定数 k を $0<k<\mathrm{OA}$ とする．$0<\mathrm{AP}\leqq k$ であるとき，w のとりうる値の範囲を $a,\ b,\ k$ を用いて表せ．

平面上で原点 O と異なる定点を A$(a,\,b)$ とする．点 P$(x,\,y)$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ へはかった角 θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ となる範囲にあるものとし，$w=\dfrac{ay-bx}{ax+by}$ とおく．2 点 X, Y の間の距離を XY で表すものとする．

(1)　$ay-bx$ および w を OA, OP, θ で表せ．

(2)　定数 k を $0<k<\mathrm{OA}$ とする．$0<\mathrm{AP}\leqq k$ であるとき，w のとりうる値の範囲を $a,\,b,\,k$ を用いて表せ．

【テーマ】：ベクトルと三角関数

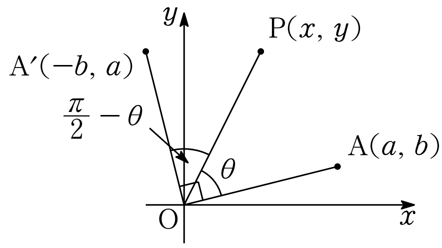
方針

与えられた式が何を意味しているのかをよく考えて，式を作っていきます．(1) は内積の計算を利用します．

♣　♠

解答

(1)　右図のように，点 A を原点周りに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転移動した点 A′ をとると，OA′ = OA であり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ とのなす角は $\dfrac{\pi}{2}-\theta$ となることから，



$$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$\iff\quad ay-bx=\mathbf{OA\cdot OP\cdot\sin\boldsymbol{\theta}}\cdots\cdots(\text{答})$$

となる．さらに，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=ax+by$$

より，

$$w=\frac{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OP}\cdot\sin\theta}{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}=\frac{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OP}\cdot\sin\theta}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\cos\theta}=\mathbf{\tan\boldsymbol{\theta}}\ \left(\mathbf{0<\boldsymbol{\theta}<\frac{\boldsymbol{\pi}}{2}}\right)\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

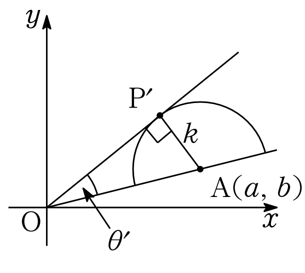
(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-a,\,y-b)$ より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ であるから，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2=\mathrm{AP}^2=(x-a)^2+(y-b)^2$$

また，$0<\mathrm{AP}\leqq k$ より，$0<\mathrm{AP}^2\leqq k^2$ であるから，

$$0<(x-a)^2+(y-b)^2\leqq k^2$$

となる．$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であることに注意すると，これは点 P が点 A を中心とし，半径 k 以下の円で直線 OA より上側の領域内を動くことを表している．点 A を中心とし，半径 k の円を C とするとき，右図のように，円 C と直線 OP が接するときの接点を P′ とし，そのときの $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP'}}$ のなす角を θ' とすれば，



$$\tan\theta'=\frac{\mathrm{AP'}}{\mathrm{OP'}}$$

が成り立つ．ここで，△OAP′ で三平方の定理より，

$$\mathrm{OP'}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AP'}^2}=\sqrt{a^2+b^2-k^2}$$

であるから，

$$\tan\theta' = \frac{k}{\sqrt{a^2+b^2-k^2}}$$

となるので，$0 < \theta \leqq \theta'$ と $y = \tan x$ が単調増加関数であることから，

$$0 < \tan\theta \leqq \tan\theta' = \frac{k}{\sqrt{a^2+b^2-k^2}} \iff \boldsymbol{0 < w \leqq \frac{k}{\sqrt{a^2+b^2-k^2}}} \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

◇ ♡

$\boxed{\text{解説}}$

ちょっとやりにくく感じる問題です．まず，与えられた式が何を表しているかをよく考えないと，方針すら浮かびません．(1) は，$ay-bx$ や $ax+by$ が内積を表しているということに気が付かなければ難しいでしょうし，(2) は (1) の結果を踏まえて $\tan\theta$ をどう表現するかを思案しなければいけません．そのためには，点 A が定点であることに注意して点 P がどのような領域を動くのかを与えられた関係式 $0 < \mathrm{AP} \leqq k$ から導き出す必要があります．分かってしまえばそれほど難しくありませんが，典型問題ばかりをやってきた受験生にはやりにくく難しく感じる問題でしょう．

関数 $f(x)$ を次のようにおく．

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}-3}{e^{2x}+e^{-2x}-6e^x-6e^{-x}+12}$$

（1） $t=e^x+e^{-x}-3$ とする．$f(x)$ を t の式で表せ．

（2） x は実数全体を動くとする．$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

（3） 実数 a に対して $f(x)=a$ をみたす実数 x の個数を求めよ．

関数 $f(x)$ を次のようにおく．

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}-3}{e^{2x}+e^{-2x}-6e^x-6e^{-x}+12}$$

（1） $t=e^x+e^{-x}-3$ とする．$f(x)$ を t の式で表せ．

（2） x は実数全体を動くとする．$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

（3） 実数 a に対して $f(x)=a$ をみたす実数 x の個数を求めよ．

【テーマ】：方程式の実数解の個数

方針

置き換えをしたら新しい変数の範囲を忘れずに求める必要があります．また，(3) では，$y=g(t)$ のグラフをきちんとかいて考える必要があることと，t と x の実数解の個数の対応を考える必要があります．

♣ ♠

解答

（1） $t=e^x+e^{-x}-3$ より，両辺を 2 乗すると，

$$\begin{aligned} t^2 &= (e^x+e^{-x}-3)^2 \\ &= e^{2x}+e^{-2x}+9+2e^x\cdot e^{-x}-6e^{-x}-6e^x \\ &= e^{2x}+e^{-2x}-6e^x-6e^{-x}+11 \end{aligned}$$

また，$e^x>0,\ e^{-x}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係より，

$$e^x+e^{-x}\geqq 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=2$$

等号は，$e^x=e^{-x}$ すなわち $x=0$ のとき，成立する．よって，$e^x+e^{-x}-3\geqq -1$ となることから，

$$f(x)=\boldsymbol{\frac{t}{t^2+1}}\ \ \boldsymbol{(t\geqq -1)}\cdots\cdots(\text{答})$$

（2） $g(t)=\dfrac{t}{t^2+1}$ とおくと，$t\geqq -1$ での $y=g(t)$ の最大値・最小値を求めればよい．

$$g'(t)=\frac{t^2+1-t\cdot 2t}{(t^2+1)^2}=\frac{-t^2+1}{(t^2+1)^2}$$

となるので，$g'(t)=0$ のとき，$t=\pm 1$ である．よって，増減表は次のようになる．

t	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$(+\infty)$
$g'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	(0)

$$g(-1)=-\frac{1}{2},\quad g(1)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{t^2+1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^2}}=0$$

ここで，$t=1$ のとき，

$$e^x+e^{-x}-3=1 \iff e^{2x}-4e^x+1=0 \iff e^x=2\pm\sqrt{3} \qquad \therefore\ \ x=\log(2\pm\sqrt{3})$$

であり，$t=-1$ のとき，

$$e^x+e^{-x}-3=-1 \iff e^{2x}-2e^x+1=0 \iff (e^x-1)^2=0 \qquad \therefore\ \ x=0$$

となるので，求める最大値と最小値は，

$$\begin{cases} \textbf{最大値}\quad \dfrac{1}{2} \quad \left(\boldsymbol{x = \log(2 \pm \sqrt{3})}\right) \\ \textbf{最小値}\quad -\dfrac{1}{2} \quad (\boldsymbol{x = 0}) \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　(2) の増減表より，$y = g(t)$ のグラフは右図のようになる．

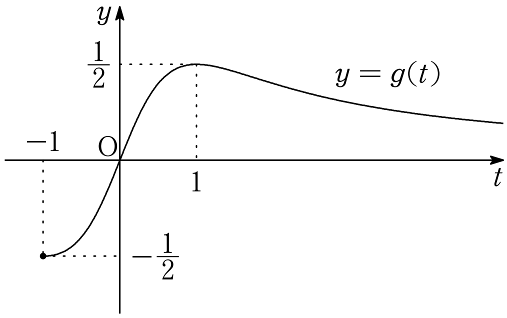
また，$t = e^x + e^{-x} - 3$ より，$\dfrac{dt}{dx} = e^x - e^{-x}$ であるから，

$$\begin{cases} x < 0 \text{ のとき} \quad \dfrac{dt}{dx} < 0 \\ x \geqq 0 \text{ のとき} \quad \dfrac{dt}{dx} \geqq 0 \end{cases}$$

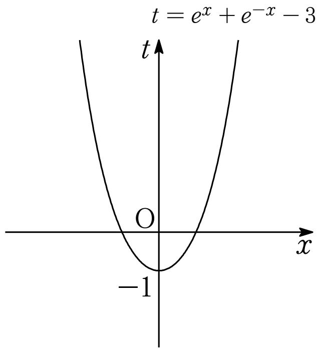
となる．さらに，

$$\lim_{x \to \pm\infty} (e^x + e^{-x} - 3) = +\infty$$

であるから，



$$\begin{cases} t = -1 \text{ のとき} \quad x = 0 \text{ の } 1 \text{ つのみ} \\ t > -1 \text{ のとき} \quad t \text{ の値 } 1 \text{ つに対して } x \text{ の値は } 2 \text{ つある} \end{cases}$$



ゆえに，$y = g(t)$ と $y = a$ のグラフの交点の個数と，上記のことを合わせて $f(x) = a$ の実数解の個数を分類すると，次のようになる．

$$\begin{cases} \boldsymbol{a < -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2} < a} \textbf{ のとき} & \textbf{0 個} \\ \boldsymbol{a = -\dfrac{1}{2}} \textbf{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{-\dfrac{1}{2} < a \leqq 0,\ a = \dfrac{1}{2}} \textbf{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{0 < a < \dfrac{1}{2}} \textbf{ のとき} & \textbf{4 個} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

◇　　　♡

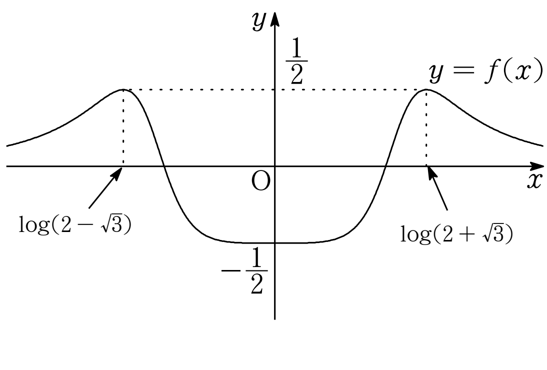
解説

置き換えをして実数解の個数を求める問題では，次の点に注意が必要になります．

- 新しく置き換えた文字の範囲を求める．
- 元の文字と新しく置き換えた文字の実数値の対応を考える．

このことから，(3) では，$t = e^x + e^{-x} - 3$ のグラフの概形を知る必要があったのです．したがって，t を x で微分してグラフの状況をつかみました．ここで，$\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} (e^x + e^{-x} - 3)$ が何故必要なのかわかりますか？これは，x の値が大きくなったとき，t がある値に収束してしまうと $t \geqq -1$ で t の値 1 つに対して x の値が 2 つ対応するとは限らなくなってしまうからです．このような議論をきちんと行った上で実数解の個数を分類する必要があります．もちろん増減表をきちんとかいていれば問題ありません．

ちなみに，$y = f(x)$ のグラフは右図のようになります．

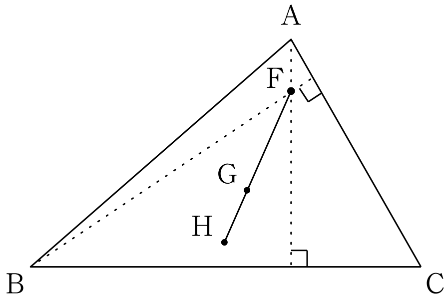


$\triangle$ABC において，AC $= 1$, BC $= k$, $\angle$C $= 60^\circ$ とする．ただし，k は $\dfrac{1}{2} < k < 2$, $k \neq 1$ を満たす実数である．A から辺 BC へ下ろした垂線と B から辺 AC へ下ろした垂線の交点を F とする．また，G を $\triangle$ABC の重心とする．$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CF}} = m\vec{a} + n\vec{b}$ とするとき，m, n を k を用いて表せ．

(3)　2 点 F, G を通る直線上に点 H をとり，G が線分 FH を 2 : 1 に内分する点となるように H を定める．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ および k を用いて表せ．



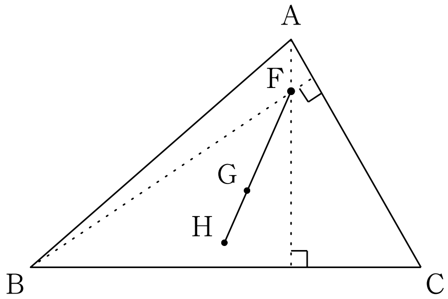
(4)　(3) で定めた H が $\triangle$ABC の外心であることを示せ．

$\triangle$ABC において，AC $= 1$, BC $= k$, $\angle$C $= 60^\circ$ とする．ただし，k は $\dfrac{1}{2} < k < 2,\ k \fallingdotseq 1$ を満たす実数である．A から辺 BC へ下ろした垂線と B から辺 AC へ下ろした垂線の交点を F とする．また，G を $\triangle$ABC の重心とする．$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{CB}} = \vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CF}} = m\vec{a} + n\vec{b}$ とするとき，m, n を k を用いて表せ．

(3)　2 点 F, G を通る直線上に点 H をとり，G が線分 FH を 2 : 1 に内分する点となるように H を定める．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ および k を用いて表せ．



(4)　(3) で定めた H が $\triangle$ABC の外心であることを示せ．

【テーマ】：ベクトルと図形

方針

様々な条件が与えられているので，何をどのように使うのかを整理しなければいけません．ほとんど計算だけで処理ができるので，計算ミスは致命傷になります．外心であることを示すためには，AH = BH = CH を示せばよいことに気付く必要があります．

♣　♠

解答

(1)　点 G は $\triangle$ABC の重心であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{CG}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}}{3} = \boldsymbol{\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}} \cdots\cdots(答)$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \overrightarrow{\mathrm{CF}} - \overrightarrow{\mathrm{CA}} = (m-1)\vec{a} + n\vec{b}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{CB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AF}}$ であることから，

$$\vec{b}\cdot\{(m-1)\vec{a} + n\vec{b}\} = 0 \iff (m-1)\vec{a}\cdot\vec{b} + n|\vec{b}|^2 = 0 \cdots\cdots①$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot k\cdot\cos 60^\circ = \dfrac{k}{2},\ |\vec{b}|^2 = k^2$ より ① は，

$$\frac{k}{2}(m-1) + nk^2 = 0 \iff m - 1 + 2nk = 0 \quad (\because\ k \neq 0) \cdots\cdots②$$

である．また，$\overrightarrow{\mathrm{BF}} = \overrightarrow{\mathrm{CF}} - \overrightarrow{\mathrm{CB}} = m\vec{a} + (n-1)\vec{b}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{CA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BF}}$ であることから，

$$\vec{a}\cdot\{m\vec{a} + (n-1)\vec{b}\} = 0 \iff m|\vec{a}|^2 + (n-1)\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \cdots\cdots③$$

$|\vec{a}|^2 = 1,\ \vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{k}{2}$ より ③ は，

$$m + (n-1)\cdot\frac{k}{2} = 0 \iff 2m + k(n-1) = 0 \cdots\cdots④$$

④ より，$m = -\dfrac{k(n-1)}{2}$ であるから，② へ代入して，

$$-\frac{k(n-1)}{2} - 1 + 2nk = 0 \iff n = \frac{2-k}{3k}$$

よって，このとき，$m = -\dfrac{k\left(\dfrac{2-k}{3k} - 1\right)}{2} = \dfrac{2k-1}{3}$ となるので，

$$\boldsymbol{m = \frac{2k-1}{3},\quad n = \frac{2-k}{3k}} \cdots\cdots(答)$$

(3)　FG : GH = 2 : 1 であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{CH}}+\overrightarrow{\mathrm{CF}}}{3}\iff\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{CG}}-\overrightarrow{\mathrm{CF}}}{2}$$

ここで,

$$\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3},\quad \overrightarrow{\mathrm{CF}}=\frac{2k-1}{3}\vec{a}+\frac{2-k}{3k}\vec{b}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CH}}&=\frac{1}{2}\left\{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\left(\frac{2k-1}{3}\vec{a}+\frac{2-k}{3k}\vec{b}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{4-2k}{3}\vec{a}+\frac{4k-2}{3k}\vec{b}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{2-k}{3}\vec{a}+\frac{2k-1}{3k}\vec{b}}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

(4)　**【証明】**

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right|^2&=\left|\frac{2-k}{3}\vec{a}+\frac{2k-1}{3k}\vec{b}\right|^2\\&=\frac{(2-k)^2}{9}\left|\vec{a}\right|^2+2\cdot\frac{(2-k)(2k-1)}{9k}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{(2k-1)^2}{9k^2}\left|\vec{b}\right|^2\\&=\frac{4-4k+k^2}{9}+\frac{-2k^2+5k-2}{9}+\frac{4k^2-4k+1}{9}\\&=\frac{k^2-k+1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right|^2&=\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|^2\\&=\left|\frac{2-k}{3}\vec{a}+\frac{-k-1}{3k}\vec{b}\right|^2\\&=\frac{4-4k+k^2}{9}+\frac{k^2-k-2}{9}+\frac{k^2+2k+1}{9}\\&=\frac{k^2-k+1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|^2&=\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}-\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|^2\\&=\left|\frac{-1-k}{3}\vec{a}+\frac{2k-1}{3k}\vec{b}\right|^2\\&=\frac{k^2+2k+1}{9}+\frac{-2k^2-k+1}{9}+\frac{4k^2-4k+1}{9}\\&=\frac{k^2-k+1}{3}\end{aligned}$$

よって, $\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right|^2$ が成り立ち, $\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|>0$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right|>0$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right|>0$ より,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right|$$

が成り立つ. ゆえに, 点 H は △ABC の外心であることが示された.　**【証明終】**

◇　♡

解説

点 F, G は, それぞれ △ABC の垂心, 重心であることを用いて, 点 H が △ABC の外心であることを示す問題です. 垂心は各頂点から対辺に垂線を下ろしたときに交わる点なので, 垂直という条件を利用して解答するのだろうと気付く必要があります. 垂直とくれば内積 = 0 は受験生の常識ですから絶対にできるようになっておきたい問題です. 計算力が必要なので, 短時間で要領よく正確に計算する能力も求められています.

最初 A, B の 2 人は数直線上の原点にいるとする．はじめに A が 2 回サイコロを投げる．1 回サイコロを投げるごとに，現在いる地点から，サイコロの目が 4 以下であれば数直線上を正の方向に 1 進み，5 または 6 であれば正の方向に 2 進む．

次に B が 2 回サイコロを投げる．1 回サイコロを投げるごとに，現在いる地点から，サイコロの目が 4 以下であれば数直線上を負の方向に 1 進み，5 または 6 であれば正の方向に 3 進む．

このように A, B がそれぞれ 2 回ずつサイコロを投げ，進み終えたときの数直線上の 2 人の位置をそれぞれ a, b とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$a \leqq b$ となる確率を求めよ．

(2)　$a-b=c$ とするとき，c の期待値を求めよ．

最初 A, B の 2 人は数直線上の原点にいるとする．はじめに A が 2 回サイコロを投げる．1 回サイコロを投げるごとに，現在いる地点から，サイコロの目が 4 以下であれば数直線上を正の方向に 1 進み，5 または 6 であれば正の方向に 2 進む．

次に B が 2 回サイコロを投げる．1 回サイコロを投げるごとに，現在いる地点から，サイコロの目が 4 以下であれば数直線上を負の方向に 1 進み，5 または 6 であれば正の方向に 3 進む．

このように A, B がそれぞれ 2 回ずつサイコロを投げ，進み終えたときの数直線上の 2 人の位置をそれぞれ a, b とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$a \leqq b$ となる確率を求めよ．

(2)　$a-b=c$ とするとき，c の期待値を求めよ．

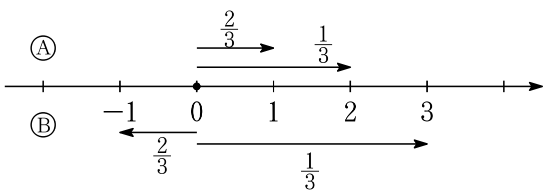
【テーマ】：移動の確率

方針

a, b のとり得る値をすべて書き出し，そのときの確率を表にして考えるとわかりやすくなります．漏らさないようにすべての場合を考えましょう．

♣　♠

解答



(1)　題意より，サイコロを 2 回投げたときの a, b のとり得る値は，

$$a=2,\ 3,\ 4\ ,\quad b=-2,\ 2,\ 6$$

であるから，それぞれの確率を表にすると次のようになる．

a	2	3	4
確率	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

b	-2	2	6
確率	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

$a \leqq b$ となる場合を考える．

(i)　$a=2$ のとき，$b=2,\ 6$ であればよいことから，このときの確率は，

$$\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{20}{81}$$

(ii)　$a=3$ のとき，$b=6$ であればよいことから，このときの確率は，

$$\frac{4}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{4}{81}$$

(iii)　$a=4$ のとき，$b=6$ であればよいことから，このときの確率は，

$$\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{81}$$

ゆえに，求める確率は，

$$\frac{20}{81}+\frac{4}{81}+\frac{1}{81}=\boldsymbol{\frac{25}{81}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$a=n$ となる確率を $P(a=n)$ 等と書くことにする．c のとり得る値は，

$$c=-4,\ -3,\ -2,\ 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6$$

であるから，(1) の表を利用して計算すると

$$P(c=-4)=P(a=2)\times P(b=6)=\frac{4}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{4}{81}$$
$$P(c=-3)=P(a=3)\times P(b=6)=\frac{4}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{4}{81}$$
$$P(c=-2)=P(a=4)\times P(b=6)=\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{81}$$
$$P(c=0)=P(a=2)\times P(b=2)=\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{16}{81}$$
$$P(c=1)=P(a=3)\times P(b=2)=\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{16}{81}$$
$$P(c=2)=P(a=4)\times P(b=2)=\frac{1}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{81}$$
$$P(c=4)=P(a=2)\times P(b=-2)=\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{16}{81}$$
$$P(c=5)=P(a=3)\times P(b=-2)=\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{16}{81}$$
$$P(c=6)=P(a=4)\times P(b=-2)=\frac{1}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{81}$$

となる．ゆえに，求める期待値を E とすると，

$$\begin{aligned}E &= (-4)\times\frac{4}{81}+(-3)\times\frac{4}{81}+(-2)\times\frac{1}{81}+0\times\frac{16}{81}+1\times\frac{16}{81}+2\times\frac{4}{81}+4\times\frac{16}{81}\\ &\quad +5\times\frac{16}{81}+6\times\frac{4}{81}\\ &= \frac{1}{81}(-16-12-2+16+8+64+80+24)\\ &= \frac{162}{81}\\ &= \mathbf{2}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

―――――――― ♢ ―――――――― ♡ ――――――――

解説

難易度は，**標準** としましたが，**基本** に近いものだと考えてください．内容的にはそれほど難しくなく丁寧にすべての場合を書き出すことさえできれば，あとは計算問題になります．

なお，$a=3$ の確率と $b=2$ の確率は反復試行の確率を考えて，

$${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}$$

として計算します．

数列 $\{a_n\}$ が漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{3a_n+2}{a_n+2}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$, $a_1=0$ で与えられている.

(1)　$x=\dfrac{3x+2}{x+2}$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha>\beta)$ とする．いま，$b_n=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ は等比数列となることを示せ.

(2)　a_n を求めて，$a_n<\alpha$ であることを示せ.

数列 $\{a_n\}$ が漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{3a_n+2}{a_n+2}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$, $a_1=0$ で与えられている.

（1） $x=\dfrac{3x+2}{x+2}$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha>\beta)$ とする．いま，$b_n=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ は等比数列となることを示せ.

（2） a_n を求めて，$a_n<\alpha$ であることを示せ.

【テーマ】：隣接２項間漸化式

方針

分数型の隣接２項間漸化式です．丁寧に誘導しているので，その通りに解けばよいだけですが,（2）で $a_n<\alpha$ を示すには工夫した式変形が必要になります.

解答

（1）**【証明】**

与えられた x に関する方程式を解くと,

$$x=\frac{3x+2}{x+2} \iff x^2+2x=3x+2 \iff x^2-x-2=0 \iff (x-2)(x+1)=0$$

したがって，$x=2,\ -1$ となる．$\alpha>\beta$ より，$\alpha=2,\ \beta=-1$ であるから，$b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n+1}$ とおける.

これより，$b_n\fallingdotseq 1$ であるから，これを a_n について解くと次のようになる.

$$b_n=\frac{a_n-2}{a_n+1} \iff b_n(a_n+1)=a_n-2 \iff a_n=\frac{-b_n-2}{b_n-1}$$

これを与えられた漸化式へ代入すると,

$$\frac{-b_{n+1}-2}{b_{n+1}-1}=\frac{3\cdot\dfrac{-b_n-2}{b_n-1}+2}{\dfrac{-b_n-2}{b_n-1}+2} \iff \frac{-b_{n+1}-2}{b_{n+1}-1}=\frac{3(-b_n-2)+2(b_n-1)}{-b_n-2+2(b_n-1)}$$

$$\iff \frac{-b_{n+1}-2}{b_{n+1}-1}=\frac{-b_n-8}{b_n-4}$$

$$\iff (b_{n+1}+2)(b_n-4)=(b_{n+1}-1)(b_n+8)$$

$$\iff b_{n+1}b_n-4b_{n+1}+2b_n-8=b_{n+1}b_n+8b_{n+1}-b_n-8$$

$$\iff b_{n+1}=\frac{1}{4}b_n$$

$b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n+1}$ より，$b_1=-2$ となるので，数列 $\{b_n\}$ は初項 -2，公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列となる.

ゆえに，示された. **（証明終）**

（2）（1）より，$b_n=-2\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ であるから,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-2}{-2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-1} \\ &= \frac{2-2\cdot 4^{n-1}}{-2-4^{n-1}} \\ &= \boldsymbol{\frac{2\cdot 4^{n-1}-2}{4^{n-1}+2}}\cdots\cdots\text{(答)} \end{aligned}$$

【証明】

$$a_n=\frac{2(4^{n-1}+2)-6}{4^{n-1}+2}=2-\frac{6}{4^{n-1}+2}$$

と変形することができ，$n \geqq 1$ であることから，

$$4^{n-1}\geqq 1 \iff 4^{n-1}+2\geqq 3 \iff \frac{4^{n-1}+2}{6}\geqq\frac{1}{2}$$

$$\iff 0<\frac{6}{4^{n-1}+2}\leqq 2 \iff -2\leqq-\frac{6}{4^{n-1}+2}<0 \iff 0\leqq 2-\frac{6}{4^{n-1}+2}<2$$

であるから，$0\leqq a_n<2$ となる．ゆえに，示された．　（証明終）

別解

(1) の後半の別解

$b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n+1}$ より，

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}+1} \\ &= \frac{\dfrac{3a_n+2}{a_n+2}-2}{\dfrac{3a_n+2}{a_n+2}+1} \\ &= \frac{3a_n+2-2(a_n+2)}{3a_n+2+a_n+2} \\ &= \frac{a_n-2}{4a_n+4} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{a_n-2}{a_n+1} \\ &= \frac{1}{4}b_n \end{aligned}$$

また，$b_1=\dfrac{a_1-2}{a_1+1}=-2$ となるので，数列 $\{b_n\}$ は初項 -2，公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列である．

◇　♡

解説

$a_{n+1}=\dfrac{ra_n+s}{pa_n+q}$ $(s \neq 0)$ 型の漸化式を解く方法を丁寧に誘導してくれているので，それにしたがって解いていけばよい．この種の問題は大抵誘導してくれているので，計算をミス無く正確にこなすことが非常に大切である．
(2) では $a_n<\alpha$ を示す部分の式変形が未経験者にはやや難しいかもしれないが，知っておきたい式変形なので，是非身につけておこう．

次の問いに答えよ．

(1)　$0 < t < 1$ のとき，不等式 $\dfrac{\log t}{2} < -\dfrac{1-t}{1+t}$ が成り立つことを示せ．

(2)　k を正の定数とする．$a > 0$ とし，曲線 $C : y = e^{kx}$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ e^{ka})$，$\mathrm{Q}(-a,\ e^{-ka})$ を考える．このとき，P における C の接線と Q における C の接線の交点の x 座標は常に正であることを示せ．

次の問いに答えよ．

(1)　$0 < t < 1$ のとき，不等式 $\dfrac{\log t}{2} < -\dfrac{1-t}{1+t}$ が成り立つことを示せ．

(2)　k を正の定数とする．$a > 0$ とし，曲線 $C : y = e^{kx}$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ e^{ka})$，$\mathrm{Q}(-a,\ e^{-ka})$ を考える．このとき，P における C の接線と Q における C の接線の交点の x 座標は常に正であることを示せ．

【テーマ】：不等式の証明

方針

$f(t) < g(t)$ を示したいときは，$h(t) = g(t) - f(t)$ とおいて，$h(t) > 0$ を示します．(2) では，まず 2 接線の交点を求めることから始めましょう．後はどのようにして (1) を使うかを考えます．

解答

(1)　**【証明】**

$f(t) = -\dfrac{1-t}{1+t} - \dfrac{\log t}{2}$ とおくと，$0 < t < 1$ で常に $f(t) > 0$ であることを示せばよい．

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{-(1+t)-(1-t)}{(1+t)^2} - \frac{1}{2t} \\ &= \frac{2}{(1+t)^2} - \frac{1}{2t} \\ &= \frac{-(1-t)^2}{2t(1+t)^2} \end{aligned}$$

よって，$0 < t < 1$ において，$f'(t) < 0$ となるので，$f(t)$ は単調減少関数である．さらに，$f(1) = 0$ となることから，$0 < t < 1$ で $f(t) > 0$ となる．よって，示された．　**(証明終)**

(2)　**【証明】**

$y' = ke^{kx}$ であるから，点 P, Q における接線の方程式は，それぞれ

$$y = ke^{ka}(x-a) + e^{ka},\quad y = ke^{-ka}(x+a) + e^{-ka}$$

となる．この 2 直線の交点の x 座標は，

$$ke^{ka}(x-a) + e^{ka} = ke^{-ka}(x+a) + e^{-ka}$$

の解である．両辺 e^{ka} 倍すると，

$$ke^{2ka}(x-a) + e^{2ka} = k(x+a) + 1$$

$$(ke^{2ka} - k)x + (1-ak)e^{2ka} = ak + 1$$

$$k(e^{2ka} - 1)x = ak + 1 + (ak-1)e^{2ka}$$

$$k(e^{2ka} - 1)x = ak(1 + e^{2ka}) + 1 - e^{2ka}$$

$k > 0,\ a > 0$ より，$k(e^{2ka} - 1) \neq 0$ であるから，

$$x = \frac{ak(1+e^{2ka}) + 1 - e^{2ka}}{k(e^{2ka} - 1)}$$

$$
\begin{aligned}
&= a\frac{e^{2ka}+1}{e^{2ka}-1}-\frac{1}{k} \\
&= a\frac{1+e^{-2ka}}{1-e^{-2ka}}-\frac{1}{k}
\end{aligned}
$$

ここで，$t=e^{-2ka}$ とおくと，$ka>0$ より $0<t<1$ をみたす．さらに，$k=-\dfrac{1}{2a}\log t$ が導かれるので，

$$
\begin{aligned}
x &= a\frac{1+t}{1-t}+\frac{2a}{\log t} \\
&= a\left(\frac{1+t}{1-t}+\frac{2}{\log t}\right) \cdots\cdots ①
\end{aligned}
$$

さらに，(1) より，$0<t<1$ のとき，

$\dfrac{\log t}{2}<-\dfrac{1-t}{1+t}<0$ であるから，$\dfrac{2}{\log t}>-\dfrac{1+t}{1-t}$

よって，$\dfrac{1+t}{1-t}+\dfrac{2}{\log t}>0$ となるので，① から，$x>0$ を得る．

ゆえに，交点の x 座標は常に正であることが示された． **(証明終)**

◊ ♡

解説

(1) はよくある基本問題なので，完答できるようにしておきましょう．

(2) は問題の流れから (1) を利用するのだろうと考えるのが自然です．したがって，(1) の形をどのようにして作り出すかが解決の鍵となります．また，$t=e^{-2ka}$ とおいた後は，$0<t<1$ を示すことも忘れてはいけません．なぜなら (1) の不等式は $0<t<1$ という条件の下で成り立つことを示したので，それを使うためには $0<t<1$ である必要があるからです．

実数 $x,\ y$ の整式 P を $P=x^2-4xy+5y^2-4y+5$ とする．

（1） P の最小値とそのときの $x,\ y$ の値を求めよ．

（2） $|x-1|\leqq 2,\ |y|\leqq 2$ とする．このとき，P の最小値を求めよ．

実数 x, y の整式 P を $P = x^2 - 4xy + 5y^2 - 4y + 5$ とする．

(1)　P の最小値とそのときの x, y の値を求めよ．

(2)　$|x-1| \leqq 2,\ |y| \leqq 2$ とする．このとき，P の最小値を求めよ．

【テーマ】：2変数関数の最大・最小

方針

(1) は，まず x で平方完成し，続いて残った部分を y について平方完成します．(2) は，まず y を固定して（定数と考えて）x を変数と考え，その後 y を変数として考えます．

♣ ♠

解答

(1)　$P = (x-2y)^2 + y^2 - 4y + 5 = (x-2y)^2 + (y-2)^2 + 1$

よって，$x = 2y$ かつ $y = 2$ すなわち，

$x = 4,\ y = 2$ のとき，最小値 1……(答)

をとる．

(2)　$|x-1| \leqq 2$ より $-2 \leqq x-1 \leqq 2$ となるので $-1 \leqq x \leqq 3$ となる．
また，$|y| \leqq 2$ より，$-2 \leqq y \leqq 2$ である．ここで，まず y を固定して x を動かすとき，すなわち P を x の関数として考えると，軸の方程式は $x = 2y$ であり，$-2 \leqq y \leqq 2$ より $-4 \leqq 2y \leqq 4$ となる．

（ｉ）　$-4 \leqq 2y \leqq -1$ すなわち $-2 \leqq y \leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき，

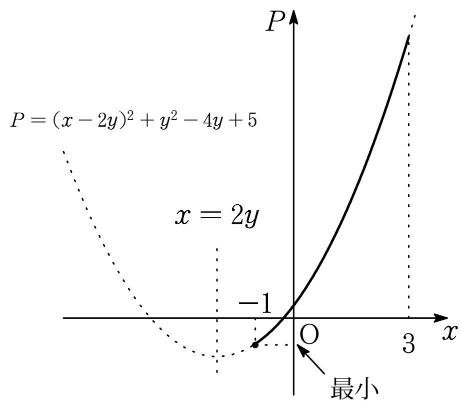
$x = -1$ で最小値をとり，このとき

$$P = 5y^2 + 6$$

となるので，$y = -\dfrac{1}{2}$ のとき，最小値をとる．

よって，その最小値は，

$$\frac{5}{4} + 6 = \frac{29}{4}$$



（ii）　$-1 \leqq 2y \leqq 3$ すなわち $-\dfrac{1}{2} \leqq y \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき，

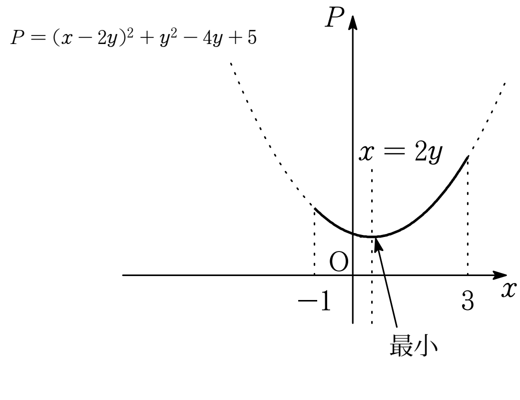
$x = 2y$ で最小値をとり，このとき

$$P = (y-2)^2 + 1$$

となるので，$y = \dfrac{3}{2}$ のとき，最小値をとる．

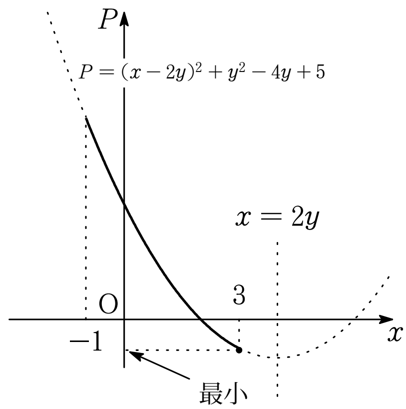
よって，その最小値は，

$$\left(\frac{3}{2} - 2\right)^2 + 1 = \frac{5}{4}$$



（iii） $3 \leqq 2y$ すなわち $y \geqq \dfrac{3}{2}$ のとき，

$x = 3$ で最小値をとり，このとき



$$\begin{aligned} P &= 9-12y+5y^2-4y+5 \\ &= 5y^2-16y+14 \\ &= 5\left(y^2-\frac{16}{5}y\right)+14 \\ &= 5\left(y-\frac{8}{5}\right)^2-\frac{64}{5}+14 \\ &= 5\left(y-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{6}{5} \end{aligned}$$

よって，$y = \dfrac{8}{5}$ のとき，最小値 $\dfrac{6}{5}$ をとる．

ゆえに，(ｉ)〜(iii) より，$\boldsymbol{x=3,\ y=\dfrac{8}{5}}$ **のとき，最小値** $\boldsymbol{\dfrac{6}{5}}$……(答)

◇ ♡

解説

2 変数関数の最大値・最小値を求める問題です．2 次関数の問題は様々な分野で応用されますので，本質を理解しておく必要があります．(1) は，x, y に条件が付いていないので，すべての実数で考えます．この場合は，まず x に着目して平方完成し，次いで残った部分を y に着目して平方完成すれば，$(\quad)^2+(\quad)^2+A$ という形を得ることができるので，2 つの (　) 内が同時に 0 になるとき，最小値 A を取ることがわかります．

(2) は，x, y に条件が付いているので厄介ですが，まず x を変数，y を定数と考えて，平方完成します．これは，

$y = x^2-4ax+5a^2-4a+5\ (-1 \leqq x \leqq 3)$ の最小値を求めよ．

という問題と文字が違うだけで，ほとんど同じであることに気が付くでしょうか？文字が別のものに入れ替わってしまうと全く違う問題に見えるという人は，演習不足であるかまたは，この問題の本質が理解できていないことになります．軸と定義域の位置関係に注意しながら場合分けをする典型的な問題です．本解答では，(ｉ) で軸が定義域の左外側，(ii) で軸が定義域内，(iii) で軸が定義域の右外側にくると考えて場合分けをしています．最後に y にも範囲があるのですから，y のとり得る値の範囲を考慮にいれて P の最小値を求めています．そして，(ｉ)〜(iii) の中で最も小さい P が求めたい最小値になるというわけです．

4 個の整数 1, a, b, c は $1<a<b<c$ をみたしている．これらの中から相異なる 2 個を取り出して和を作ると，$1+a$ から $b+c$ までのすべての整数の値が得られるという．a, b, c の値を求めよ．

4 個の整数 1, a, b, c は $1<a<b<c$ をみたしている．これらの中から相異なる 2 個を取り出して和を作ると，$1+a$ から $b+c$ までのすべての整数の値が得られるという．a, b, c の値を求めよ．

【テーマ】：整数問題（絞込み）

方針

4 個の整数で作ることができる和をすべて書き出して，その大小関係を調べてみます．すると，大小関係が不明なものが出てくるので，その大小で場合分けを行いましょう．また，$1+a$ から $b+c$ までのすべての整数値は，$1+a$ の値を基準に考えるとよいでしょう．

♣ ♠

解答

4 個の整数 1, a, b, c から異なる 2 個を取り出して和を作ると，

$$1+a,\quad 1+b,\quad 1+c,\quad a+b,\quad a+c,\quad b+c$$

の 6 数ができる．さらに，$1<a<b<c$ であることから，

$$1+a<1+b<1+c \text{ かつ } a+b<a+c<b+c$$

が成り立つことがわかる．

ここで，$1+a<b+c$ であることは明らかなので，$1+c$ と $a+b$ の大小関係で場合分けを行う．

（i） $1+a<1+b<1+c<a+b<a+c<b+c$

（ii） $1+a<1+b<a+b<1+c<a+c<b+c$

（iii） $1+a<1+b<1+c=a+b<a+c<b+c$

よって，$1+a$ から $b+c$ までのすべての整数値が得られるためには，次のようになればよい．

$$\text{（i）}\begin{cases} 1+b = (1+a)+1 & \cdots\cdots ① \\ 1+c = (1+a)+2 & \cdots\cdots ② \\ a+b = (1+a)+3 & \cdots\cdots ③ \\ a+c = (1+a)+4 & \cdots\cdots ④ \\ b+c = (1+a)+5 & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

①〜③ より，$a=3$, $b=4$, $c=5$ を得る．これらは，④, ⑤ も満たす．

$$\text{（ii）}\begin{cases} 1+b = (1+a)+1 & \cdots\cdots ⑥ \\ a+b = (1+a)+2 & \cdots\cdots ⑦ \\ 1+c = (1+a)+3 & \cdots\cdots ⑧ \\ a+c = (1+a)+4 & \cdots\cdots ⑨ \\ b+c = (1+a)+5 & \cdots\cdots ⑩ \end{cases}$$

⑥〜⑧ より，$a=2$, $b=3$, $c=5$ を得る．これらは，⑨, ⑩ も満たす．

$$(\text{iii})\quad \begin{cases} 1+b &= (1+a)+1 & \cdots\cdots ⑪ \\ 1+c &= (1+a)+2 & \cdots\cdots ⑫ \\ a+b &= (1+a)+2 & \cdots\cdots ⑬ \\ a+c &= (1+a)+3 & \cdots\cdots ⑭ \\ b+c &= (1+a)+4 & \cdots\cdots ⑮ \end{cases}$$

⑪〜⑬ より，$a=2$, $b=3$, $c=4$ を得る．これらは，⑭, ⑮ も満たす．

ゆえに，(ⅰ)〜(iii) より，求める a, b, c の値は，

$(a, b, c)=(3, 4, 5), (2, 3, 5), (2, 3, 4)$……(答)

である．

◇ ♡

解説

『$1+a$ から $b+c$ までのすべての整数値が得られる』という部分をどのように表現するかがポイントです．解答では，$1+a$ の値を基準として 1 ずつ大きい値になるようにしました．地道ですがこの方法が一番確実です．そうすると 3 つの未知数を含む式が 5 つできます．式が余分なので，このような場合は，まず 3 つの方程式で a, b, c を求めて，これらが残りの 2 式を満たしていることを確認するという方法をとります．

$1+c$ と $a+b$ の大小関係が不明なので，最初に作った 2 つの不等式をつなげるために，場合分けが必要になるという点をしっかり理解しておきましょう．

$0 \leqq x \leqq \pi$，$k > \dfrac{1}{2}$ のとき，曲線 $y = \sin x$ と曲線 $y = k\sin 2x$ とで囲まれる 2 つの部分の面積の比が $1:2$ となるように定数 k の値を定めよ.

$0 \leqq x \leqq \pi$，$k > \dfrac{1}{2}$ のとき，曲線 $y = \sin x$ と曲線 $y = k\sin 2x$ とで囲まれる 2 つの部分の面積の比が $1:2$ となるように定数 k の値を定めよ．

【テーマ】：交点が求められない２曲線で囲まれる面積

方針

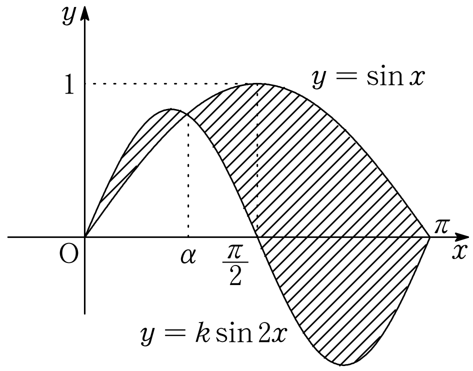
$y=\sin x$ と $y=k\sin 2x$ の $0<x<\pi$ での交点は求めることができないので，文字を用いて表します．

♣ ♠

解答

$y=\sin x$ と $y=k\sin 2x$ の $0<x<\pi$ での交点の x 座標を α とすると，

$$\sin\alpha = k\sin 2\alpha \iff \sin\alpha = 2k\sin\alpha\cos\alpha$$



$\sin\alpha \neq 0$ より，$1 = 2k\cos\alpha$ であるから，$\cos\alpha = \dfrac{1}{2k}$ を得る．

ここで，$k > \dfrac{1}{2}$ より，$\cos\alpha > 0$ よって，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ である．

ゆえに，

$$0 \leqq x \leqq \alpha \text{ のとき}\quad k\sin 2x \geqq \sin x$$

$$\alpha \leqq x \leqq \pi \text{ のとき}\quad k\sin 2x \leqq \sin x$$

であるから，

$$1:2 = \int_0^{\alpha}(k\sin 2x - \sin x)\,dx : \int_{\alpha}^{\pi}(\sin x - k\sin 2x)\,dx$$

$$2\int_0^{\alpha}(k\sin 2x - \sin x)\,dx = \int_{\alpha}^{\pi}(\sin x - k\sin 2x)\,dx$$

$$2\left[\frac{k}{2}(-\cos 2x) + \cos x\right]_0^{\alpha} = \left[-\cos x + \frac{k}{2}\cos 2x\right]_{\alpha}^{\pi}$$

$$-k\cos 2\alpha + 2\cos\alpha + k - 2 = 1 + \frac{k}{2} + \cos\alpha - \frac{k}{2}\cos 2\alpha$$

$$-\frac{k}{2}\cos 2\alpha + \cos\alpha + \frac{k}{2} - 3 = 0$$

$$-k\cos 2\alpha + 2\cos\alpha + k - 6 = 0$$

$$-k(2\cos^2\alpha - 1) + 2\cos\alpha + k - 6 = 0$$

$$-k\left(2\cdot\frac{1}{4k^2} - 1\right) + 2\cdot\frac{1}{2k} + k - 6 = 0 \qquad \left(\because\ \cos\alpha = \frac{1}{2k}\right)$$

$$-\frac{1}{2k} + k + \frac{1}{k} + k - 6 = 0 \iff 4k^2 - 12k + 1 = 0 \quad \therefore\ k = \frac{3\pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$k > \dfrac{1}{2}$ であるから，$\boldsymbol{k = \dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}}$……(答)

♢ ♡

解説

交点の x 座標が求まらないときは，文字で代用するというのは非常に大切な手法です．様々なところで活用できるので，必ず理解しておきましょう．

実数 a に対し，角 θ の方程式

$$\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta+\frac{3}{2}=a \qquad \cdots\cdots ①$$

を考える．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

（1） $x=\sin\theta+\cos\theta$ とするとき，x のとり得る値の範囲を求めよ．

（2） ① を x で表せ．

（3） ① がただ一つの実数解をもつための a の値を求め，そのときの解 θ も求めよ．

実数 a に対し，角 θ の方程式

$$\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta+\frac{3}{2}=a \qquad \cdots\cdots①$$

を考える．ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする．

(1)　$x=\sin\theta+\cos\theta$ とするとき，x のとり得る値の範囲を求めよ．

(2)　① を x で表せ．

(3)　① がただ一つの実数解をもつための a の値を求め，そのときの解 θ も求めよ．

【テーマ】：三角方程式の実数解の個数

方針

誘導がついているので，それにしたがえば方針は立てやすいでしょう．ポイントは，x の値 1 つに対して θ の値が 1 つとは限らないところです．x と θ の対応をきちんと調べておくことが必要です．

♣　♠

解答

(1)　$x=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ であり，$0\leqq\theta<2\pi$ であることから，

$$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$$

となる．したがって，

$$-1\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq1 \iff -\sqrt{2}\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$$

となるので，x のとり得る値の範囲は，$\boldsymbol{-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}}$……**(答)**

(2)　$x^2=1+2\sin\theta\cos\theta$ より，$\sin\theta\cos\theta=\frac{x^2-1}{2}$ である．よって，① 式は次のようになる．

$$\frac{x^2-1}{2}+x+\frac{3}{2}=a \iff \boldsymbol{\frac{1}{2}x^2+x+1=a}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(3)　$\frac{1}{2}x^2+x+1=a$ ……② とする．(2) より，$f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1$ $(-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2})$ とおくと，② の実数解の個数は，$y=f(x)$ と $y=a$ のグラフの交点の個数と一致する．

$$f(x)=\frac{1}{2}(x^2+2x)+1=\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{1}{2}$$ であるから，頂点の座標は $\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$ である．

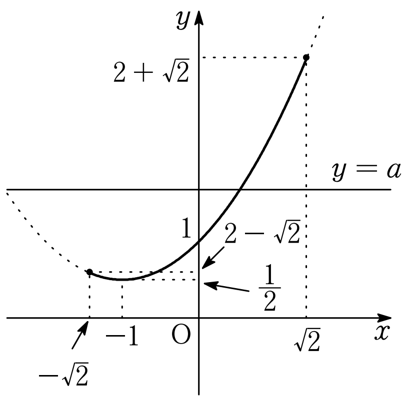
よって，$y=f(x)$ のグラフは，右図のようになる．

ここで，$x=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ であることから，x の値 1 つに対して，

$x\neq\pm\sqrt{2}$ のときは，θ の値は 2 つ決まる．

$x=\pm\sqrt{2}$ のときは，θ の値は 1 つ決まる．

よって，① がただ一つの実数解をもつためには，$x=\pm\sqrt{2}$ でなければならないが，グラフより $a=2-\sqrt{2}$ となるときは，$x=-\sqrt{2}$ 以外の解が存在するので，この場合は題意を満たさず不適．



よって，$a=2+\sqrt{2}$ のときのみが，題意を満たすので，このとき，

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1 \text{ より，} \theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}$$

ゆえに，求める a の値は，$\boldsymbol{a=2+\sqrt{2}}$ であり，このとき，$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{4}}$……(**答**)

◇ ♡

解説

x と θ の対応関係がしっかりと把握できれば，2 次関数の解の配置問題となります．② の式では，定数分離法と呼ばれる方法を使っています．これは，定数 a を含む式（右辺）と含まない式（左辺）に分ける方法です．したがって，x^2 の係数が分数になってもそのままにしておきます．

$a=2-\sqrt{2}$ となるときは，グラフから $x=-\sqrt{2}$ 以外に $x=\sqrt{2}-2$（$x=-1$ に関する対称性を利用して求めると簡単です）で $y=f(x)$ と $y=a$ は交点をもちます．このことから，① の解を分類すると，次のようになります．

$$\begin{cases} a<\dfrac{1}{2},\ 2+\sqrt{2}<a \text{ のとき，} & 0\text{ 個} \\ a=2+\sqrt{2} \text{ のとき，} & 1\text{ 個} \\ a=\dfrac{1}{2},\ 2-\sqrt{2}<a<2+\sqrt{2} \text{ のとき，} & 2\text{ 個} \\ a=2-\sqrt{2} \text{ のとき，} & 3\text{ 個} \\ \dfrac{1}{2}<a<2-\sqrt{2} \text{ のとき，} & 4\text{ 個} \end{cases}$$

このように，1 つの問題に対して，解くだけではなくそこから問題をさらに広げて考えることをして，力をつけていきましょう．

次の問いに答えよ．

（1） 関数 $f(x)$ に対し，等式 $\displaystyle\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$ を証明せよ．

（2） 定積分 $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}\,dx$ の値を求めよ．

次の問いに答えよ．

(1)　関数 $f(x)$ に対し，等式 $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$ を証明せよ．

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}\,dx$ の値を求めよ．

【テーマ】：対称性を利用した定積分の計算

方針

$x=\pi-t$ とおいて，置換積分を行います．(2) は (1) を利用すればよいので，どの部分が $f(x)$ に対応するかを考えます．

♣　♠

解答

(1)　**【証明】**

$I=\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx$ において，$x=\pi-t$ とおくと，$dx=-dt$ で，

x と t の対応は右表のようになるので，

x	0	$\to$	π
t	π	$\to$	0

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin(\pi-t))\,(-dt)\\
&= \int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)\,dt\\
&= \int_0^{\pi}\pi f(\sin t)\,dt-\int_0^{\pi} tf(\sin t)\,dt\\
&= \int_0^{\pi}\pi f(\sin t)\,dt - I\\
2I &= \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\,dt\\
I &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin t)\,dt \qquad \therefore\ \int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx
\end{aligned}$$

よって，示された．　　　　**(証明終)**

(2)　$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ とおくと，(1) より，

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}\,dx &= \int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx\\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx \qquad (\because\ (1))\\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\,dx\\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{2-\cos^2 x}\,dx\\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{2}-\cos x}+\frac{\sin x}{\sqrt{2}+\cos x}\right)dx\\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\int_0^{\pi}\left\{\frac{(\sqrt{2}-\cos x)'}{\sqrt{2}-\cos x}-\frac{(\sqrt{2}+\cos x)'}{\sqrt{2}+\cos x}\right\}dx\\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\Big[\log\left(\sqrt{2}-\cos x\right)-\log\left(\sqrt{2}+\cos x\right)\Big]_0^{\pi}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left[\left\{\log\left(\sqrt{2}+1\right)-\log\left(\sqrt{2}-1\right)\right\}-\left\{\log\left(\sqrt{2}-1\right)-\log\left(\sqrt{2}+1\right)\right\}\right]\\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left\{\log\left(\sqrt{2}+1\right)-\log\left(\sqrt{2}-1\right)\right\}\\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\log\left(\sqrt{2}+1\right)^2\\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{\sqrt{2}}\log\left(\sqrt{2}+1\right)}\cdots\cdots\text{(答)}
\end{aligned}
$$

◇ ♡

解説

(1) で示した等式を図形的に考えてみましょう．$F(x)=f(\sin x)$ とおくと，

$$F(\pi-x)=F(x) \iff F\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=F\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

が成り立ちます．これは，$F(x)$ が $x=\frac{\pi}{2}$ に関して対称であることを表しています．

また，$G(x)=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)F(x)$ とおくと，

$$G(\pi-x)=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)F(x)=-G(x) \iff G\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-G\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

となり，$G\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ であることから，$G(x)$ は点 $\left(\frac{\pi}{2},\,0\right)$ に関して対称であることがわかります．ゆえに，

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\pi G(x)\,dx=\int_0^\pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)F(x)\,dx \iff \int_0^\pi G(x)\,dx=-\int_0^\pi G(x)\,dx\\
&\iff \int_0^\pi G(x)\,dx=0
\end{aligned}
$$

が導かれます．したがって，

$$\int_0^\pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)F(x)\,dx=0 \quad\iff\quad \int_0^\pi xF(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi F(x)\,dx$$

を得ることができます．このように背景を考えることで問題の真意が見えてくることがあります．

ちなみに，(1) の最後のところでは，定積分の値は積分変数によらない．すなわち

$$\int_0^\pi F(t)\,dt=\int_0^\pi F(x)\,dx$$

であることを用いています．

k を自然数の定数とする．自然数 n に対して，

$$S_n = |n-1| + |n-2| + \cdots\cdots + |n-k|$$

とおく．

（1） S_n を求めよ．

（2） S_n の最小値と，そのときの n の値を求めよ．

k を自然数の定数とする．自然数 n に対して，

$$S_n = |n-1| + |n-2| + \cdots\cdots + |n-k|$$

とおく．

（1） S_n を求めよ．

（2） S_n の最小値と，そのときの n の値を求めよ．

【テーマ】：絶対値を含む和

方針

絶対値をはずすことを考えますが，n と k の大小関係が不明です．したがって，$n \geqq k$ と $n < k$ で場合分けを行います．

♣ ♠

解答

(1)

（ｉ） $1 \leqq n < k$ のとき，

$$\begin{aligned} S_n &= \underbrace{(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+2+1}_{1\sim(n-1)\text{ までの自然数の和}} + 0 + \underbrace{1+2+\cdots\cdots+(k-n)}_{1\sim(k-n)\text{ までの自然数の和}} \\ &= \frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{2}(k-n)(k-n+1) \\ &= \frac{1}{2}(n^2-n+k^2-kn+k-nk+n^2-n) \\ &= \frac{1}{2}(2n^2-2kn-2n+k^2+k) \\ &= n^2-(k+1)n+\frac{1}{2}k(k+1) \end{aligned}$$

（ii） $k \leqq n$ のとき，

$$\begin{aligned} S_n &= (n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+(n-k) \\ &= kn - \sum_{i=1}^{k} i \\ &= kn - \frac{1}{2}k(k+1) \\ &= \frac{k}{2}(2n-k-1) \end{aligned}$$

ゆえに，

$$\boldsymbol{S_n = \begin{cases} n^2-(k+1)n+\dfrac{1}{2}k(k+1) & (1 \leqq n < k) \\ \dfrac{k}{2}(2n-k-1) & (k \leqq n) \end{cases}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $n \geqq k$ のとき，S_n は n について 1 次式で k が自然数であることから単調増加となるので，$n=k$ のとき，最小値 $\frac{1}{2}k(k-1)$ をとる．

$1 \leqq n < k$ のとき，

$$
\begin{aligned}
S_n &= \left(n-\frac{k+1}{2}\right)^2-\frac{k^2+2k+1}{4}+\frac{k^2+k}{2}\\
&= \left(n-\frac{k+1}{2}\right)^2+\frac{-k^2-2k-1+2k^2+2k}{4}\\
&= \left(n-\frac{k+1}{2}\right)^2+\frac{k^2-1}{4}
\end{aligned}
$$

である．よって，

$$
\begin{cases}
k\text{ が奇数のとき}\quad n=\dfrac{k+1}{2}\text{ で最小値 }\dfrac{k^2-1}{4}\\
k\text{ が偶数のとき}\quad n=\dfrac{k}{2},\ \dfrac{k+2}{2}\text{ で最小値 }\dfrac{k^2}{4}
\end{cases}
$$

をとる．

ここで，$\dfrac{k^2-k}{2}$ と $\dfrac{k^2-1}{4}$ または $\dfrac{k^2}{4}$ の大小関係を調べる．

$$
\frac{k^2-k}{2}-\frac{k^2-1}{4}=\frac{2k^2-2k-k^2+1}{4}=\frac{k^2-2k+1}{4}=\frac{(k-1)^2}{4}\geqq 0
$$

$$
\frac{k^2-k}{2}-\frac{k^2}{4}=\frac{2k^2-2k-k^2}{4}=\frac{k^2-2k}{4}=\frac{k(k-2)}{4}\geqq 0\quad (\because\quad k\geqq 2)
$$

よって，いずれにしても $\dfrac{k^2-k}{2}$ より $\dfrac{k^2-1}{4}$ または $\dfrac{k^2}{4}$ の方が小さいので，求める S_n の最小値は，

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{k}\textbf{ が奇数のとき}\quad \boldsymbol{n=\dfrac{k+1}{2}}\textbf{ で最小値 }\boldsymbol{\dfrac{k^2-1}{4}}\\
\boldsymbol{k}\textbf{ が偶数のとき}\quad \boldsymbol{n=\dfrac{k}{2},\ \dfrac{k+2}{2}}\textbf{ で最小値 }\boldsymbol{\dfrac{k^2}{4}}
\end{cases}
\quad\cdots\cdots\text{(答)}
$$

◇ ♡

解説

本問は，様々な大学で類題が出題されています．基本的な考え方は同じなので，この問題をしっかりと理解しておきましょう．

(1) は，絶対値をはずす作業から始めますが，n と k の関係がまったく書かれていないのでその大小関係が不明です．不明ということは場合分けをしなくてはいけないということになります．(ｉ) の場合は，k 個の絶対値内がすべて正になる場合を考えていて，(ii) の場合は，k 個の絶対値内のどこかで符号が入れ替わる場合を考えています．したがって，(ii) では，途中で 0 となる項が出てきて，その前後では $1+2+\cdots$ という計算になる点に注意を払わなければいけません．答えの形も (2) を想定して n について整理しておくとよいでしょう．

(2) では，最小値を考えますが，$n\geqq k$ のときは，n に関する 1 次関数でその係数が正であることから単調増加していることがわかります．したがって，この区間で最小となるのは，$n=k$ のときとなります．次に，$1\leqq n<k$ のときは，(1) から S_n は n に関する 2 次関数となっているので，平方完成をすることで，最小値を求めることができます．ただし，n は自然数であることから頂点で必ず最小値を取るとは限らない点に注意が必要です．例えば，$k=4$ なら頂点の座標は $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{15}{4}\right)$ となるので，$n=\dfrac{5}{2}$ で最小値をとるなんてことはありえません．したがって，k の偶奇で場合分けが必要になるのです．最後に，$n\geqq k$ のときと $1\leqq n<k$ のときを比べて小さい方が S_n の最小値となります．

直線 $l : y = x + 1$ と曲線 $C : y = 2x^2 - 4x + 1$ との交点を P, Q とするとき，次の各問いに答えよ．ただし，P の x 座標は Q の x 座標より小さいものとする．

(1)　直線 l に平行で曲線 C に接する直線を m とするとき，点 P と直線 m との距離を求めよ．

(2)　曲線 C と (1) における直線 m との接点を R とする．このとき，△PQR の面積を求めよ．

(3)　点 (x, y) が直線 l と曲線 C で囲まれる領域にあるとき，$x + y$ の最小値を求めよ．ただし，領域は境界を含むものとする．

直線 $l : y=x+1$ と曲線 $C : y=2x^2-4x+1$ との交点を P, Q とするとき，次の各問いに答えよ．ただし，P の x 座標は Q の x 座標より小さいものとする．

(1) 直線 l に平行で曲線 C に接する直線を m とするとき，点 P と直線 m との距離を求めよ．

(2) 曲線 C と (1) における直線 m との接点を R とする．このとき，△PQR の面積を求めよ．

(3) 点 (x, y) が直線 l と曲線 C で囲まれる領域にあるとき，$x+y$ の最小値を求めよ．ただし，領域は境界を含むものとする．

【テーマ】：領域と最大・最小

方針

(1), (2) では，△PQR の面積の最大値を求めようとしています．(3) は，定番の $x+y=k$ とおいて k の最小値を求める問題です．

解答

(1) l と C の交点の x 座標は

$$x+1=2x^2-4x+1 \iff 2x^2-5x=0 \iff x(2x-5)=0$$

であるから，$x=0,\ \dfrac{5}{2}$ となる．題意より，(P の x 座標) < (Q の x 座標) より，P$(0, 1)$, Q$\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$ である．次に，m の傾きは 1 であるから，m の方程式は $y=x+b$ とおける．これが C と接するので，

$$2x^2-4x+1=x+b \iff 2x^2-5x+1-b=0$$

が重解をもてばよい．判別式を D とすると，

$$D=(-5)^2-4\cdot 2\cdot(1-b)=0 \iff 25-8+8b=0 \qquad \therefore\ b=-\frac{17}{8}$$

よって，m の方程式は $y=x-\dfrac{17}{8}$ となる．ゆえに，点 P と直線 m との距離を d とすると，点と直線の距離の公式から，

$$d=\frac{\left|-1-\frac{17}{8}\right|}{\sqrt{1+1}}=\frac{\frac{25}{8}}{\sqrt{2}}=\frac{25}{8\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{25\sqrt{2}}{16}}\cdots\cdots(\quad)$$

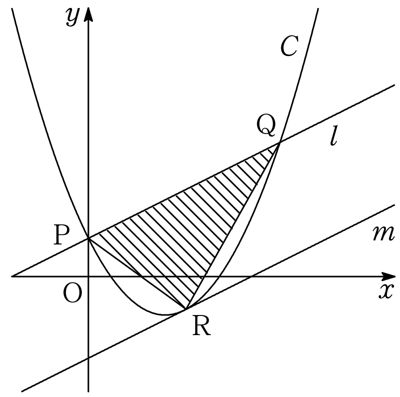
(2) 直線 l と直線 m は平行であるから，△PQR において，

底辺を PQ，高さを d と考えればよい．

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}-1\right)^2}=\sqrt{2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PQR}&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PQ}\cdot d\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{25\sqrt{2}}{16}\\&=\boldsymbol{\frac{125}{32}}\cdots\cdots(\quad)\end{aligned}$$



(3)　$x+y=k$ とおくと，$y=-x+k$ となるので，この直線が題意の領域と交点をもつときの k の値の最小値を求めればよい．k が最小となるのは，$y=-x+k$ が曲線 C と接するときであるから，

$$2x^2-4x+1=-x+k \iff 2x^2-3x+1-k=0$$

が重解をもてばよい．判別式を D' とすると，

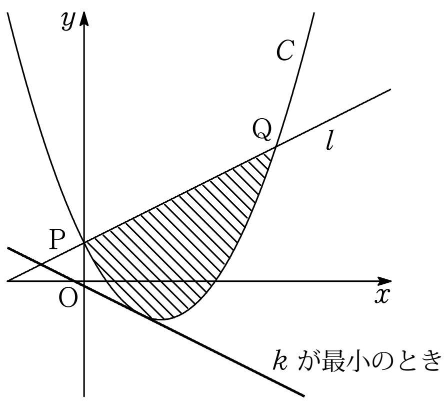
$$D'=(-3)^2-4\cdot2\cdot(1-k)=0$$

$$\iff 9-8+8k=0 \qquad \therefore\ k=-\frac{1}{8}$$

で，このとき重解は，$x=\dfrac{3}{4}$ となる．ゆえに，$y=-\dfrac{7}{8}$ である．

したがって，求める $x+y$ の最小値は，

$$\boldsymbol{-\frac{1}{8}\quad\left(x=\frac{3}{4},\ y=-\frac{7}{8}\right)}\cdots\cdots(\quad)$$



◇　♡

解説

(1), (2) は三角形の面積の最大値を求める典型的な問題で，丁寧に誘導してくれているので完答を目指したい問題です．(3) もよく出題される問題なので，確実にできるようにしておきましょう．

(3) で，方程式の重解を求めていますが，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の重解は，$x=-\dfrac{b}{2a}$ であることは知っておきましょう．重解となるのは 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ が x 軸と接するときなので，頂点の x 座標が重解と一致することになるからです．重解をもつときの k の値を求めた後で，再び 2 次方程式に k を代入して解いていたのでは時間がかかってしまいますからこのような計算方法を知っておくことは大切なことです．ただし，k の値が本当に合っているかどうかは元の方程式に代入してちゃんと重解をもつかどうか調べることでわかるので，検算という意味で代入するのはよいでしょう．

数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) で定める．ここで，e は自然対数の底である．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　a_{n+1} と a_n の関係式を求めよ．

(2)　自然数 n に対して，$a_n = b_n e + c_n$ となる整数 b_n, c_n があることを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = -\frac{1}{e}$ を示せ．

数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\displaystyle\int_0^1 x^n e^x\,dx\ (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$ で定める．ここで，e は自然対数の底である．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　a_{n+1} と a_n の関係式を求めよ．

(2)　自然数 n に対して，$a_n=b_ne+c_n$ となる整数 $b_n,\,c_n$ があることを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n}=-\frac{1}{e}$ を示せ．

方針

(1), (2) は典型問題です．(3) では，不等式を作って極限値を計算しますが，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n}$ を求めればよいことに気付けるかどうかがポイントです．

♣　♠

解答

(1)　a_{n+1} を，部分積分法を用いて計算すると，

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=\int_0^1 x^{n+1}e^x\,dx\\ &=\Big[\,x^{n+1}e^x\,\Big]_0^1-\int_0^1(n+1)x^ne^x\,dx\\ &=e-(n+1)a_n \end{aligned}$$

ゆえに，求める漸化式は，$\boldsymbol{a_{n+1}=-(n+1)a_n+e}$……(　)

(2)

(ⅰ)　$n=1$ のとき，

$$\begin{aligned} a_1&=\int_0^1 xe^x\,dx\\ &=\Big[\,xe^x\,\Big]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx\\ &=e-\Big[\,e^x\,\Big]_0^1=e-(e-1)=1 \end{aligned}$$

よって，$b_1=0,\ c_1=1$ とすれば，成り立つ．

(ⅱ)　$n=k$ すなわち，

$$a_k=b_ke+c_k\qquad\cdots\cdots①$$

をみたす整数 $b_k,\,c_k$ が存在すると仮定すると，(1) で求めた漸化式に $n=k$ を代入して，

$$\begin{aligned} a_{k+1}&=-(k+1)a_k+e\\ &=-(k+1)(b_ke+c_k)+e\quad(\because\ ①)\\ &=\{1-(k+1)b_k\}e-(k+1)c_k \end{aligned}$$

よって，$b_{k+1}=1-(k+1)b_k,\ c_{k+1}=-(k+1)c_k$ とすれば，$k,\,b_k,\,c_k$ はすべて整数であるから b_{k+1},

c_{k+1} も整数となり成り立つ.

ゆえに, (i), (ii) よりすべての自然数 n について, 題意は示された.

(3)

$0 \leqq x \leqq 1$ において, $0 \leqq x^n e^x \leqq e^x$ が成り立つので,

$$\int_0^1 0\,dx \leqq \int_0^1 x^n e^x\,dx \leqq \int_0^1 e^x\,dx \qquad \therefore\ 0 \leqq a_n \leqq e-1 \cdots\cdots ②$$

また, (2) から,

$$c_n = -nc_{n-1} \iff \frac{c_n}{n!} = -\frac{c_{n-1}}{(n-1)!} \qquad (☜\ \text{両辺を } n!\ \text{で割った})$$

となるので, $\dfrac{c_n}{n!} = (-1)^{n-1}\dfrac{c_1}{1!} \iff c_n = (-1)^{n-1}n!$

よって, ② から

$$0 \leqq \left|\frac{a_n}{c_n}\right| \leqq \frac{e-1}{n!}$$

を得る. $n \to \infty$ のとき, $\dfrac{e-1}{n!} \to \infty$ であるから, はさみうちの原理より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n} = 0$ となる.

さらに, (2) から $b_n = \dfrac{a_n - c_n}{e}$ であることより,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_n - c_n}{ec_n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\left(\frac{a_n}{c_n} - 1\right)\\ &= -\frac{1}{e}\end{aligned}$$

ゆえに, 示された.

◇ ♡

解説

(1), (2) は頻出問題なので, 確実に得点したいところです. 漸化式を作るときは, 部分積分法を使うことが多いので, しっかりと類題を演習して慣れておきましょう.

本問は, (3) での方針が立てにくいので, ここで時間を費やしてしまいます. ただ, (1), (2) を使って証明するのだろうという予想は立てられなければならないので, (1), (2) をうまく利用することを考えます. 積分不等式を作って極限値を計算するのは頻出問題なのですが, ここでは直接それが答えとどのように結びつくかが見えにくいかもしれません. 解答の方針を得るまでの考え方は次のようになります.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n} = -\frac{1}{e}$ を示すには, 何を使えばいいのかな? (1), (2) を使うんだろうなぁ〜… (2) で示した式って,

$$\frac{a_n}{c_n} = \frac{b_n}{c_n}e + 1$$

って変形できるなぁ〜…あれっ!?この $\dfrac{b_n}{c_n}$ に $-\dfrac{1}{e}$ を代入したら

$$\frac{a_n}{c_n} = -\frac{1}{e}\cdot e + 1 = 0$$

になるから, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n} = 0$ が示されれば, 題意は示せそうだな!

積分不等式を使って, 極限値の計算をする場合は, はさみうちの原理がよく使われます. 極限値が 0 になるように する方が, 計算しやすいことが多いのでこのような考えが出てくるのです.

$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{2}$, $\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ の値を求めよ.

$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{2}$, $\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ の値を求めよ．

方針

加法定理と和積の公式をうまく活用します．

解答

$$\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{2} & \cdots\cdots① \\ \sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{3} & \cdots\cdots②\end{cases}$$

とする．① と ② において，両辺を 2 乗すると，

$$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{4}$$

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{9}$$

辺々加えて，

$$1+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)+1=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}$$

$$2+2\cos(\alpha-\beta)=\frac{13}{36} \iff \boldsymbol{\cos(\alpha-\beta)=-\frac{59}{72}}\cdots\cdots(\quad)$$

次に，① と ② において，和積の公式を用いると，

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{2} \quad\cdots\cdots③$$

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{3} \quad\cdots\cdots④$$

であるから，$\dfrac{④}{③}$ を計算することにより，

$$\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} \iff \tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2}{3}$$

を得る．ここで，$\alpha+\beta=\theta$ とおくと，$\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2}{3}$ であり，このとき $\cos\theta$ を求めればよい．

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{1+\frac{4}{9}}=\frac{9}{13}$$

となるので，半角の公式から

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2} \iff \cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=2\cdot\frac{9}{13}-1=\frac{5}{13}$$

を得る．ゆえに，$\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}}$……(答)

解説

$\cos(\alpha-\beta)$ の方は，加法定理から簡単に導けますが，$\cos(\alpha+\beta)$ の方で苦労するかもしれません．与えられた条件から $\alpha+\beta$ の形を出すにはどの公式を利用するかを考える必要があります．そのためには，三角関数で学んだ公

式がすべて頭に入っていなければいけません．

後半では，$\tan\dfrac{\theta}{2}$ の値から $\cos\theta$ の値を求めましたが，実は有名な式変形で入試でもしばしば取りあげられるので，まとめておきましょう．

$-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ とする．$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ のとき，$\sin\theta, \cos\theta$ を t を用いて表すと次のようになる．

$$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

θ の範囲を $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ のように設定しているのは，t がすべての実数をとれるようにするためです．この結果は，暗記しておくとよいでしょう．念のため，証明を付けておきます．この証明もできるようになっておいてください．

【証明】

$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{1}{1+t^2}$ であり，$\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1$ であることから，

$$\cos\theta=\frac{2}{1+t^2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

を得る．さらに，

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{2t}{1+t^2}$$

よって，示された．　**（証明終）**

この証明で気を付けて欲しいところは，$\sin\theta$ の値を求める際に，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を用いないという点です．この式を用いると，最後に平方根を取らなければならなくなり，$\sin\theta=\pm\dfrac{2t}{1+t^2}$ が出てきます．そうすると，一方が成り立たないことを言わなければならず面倒になります．ここは，2 倍角の公式を利用してスマートに求めたいところです．この証明は式をメインに扱いましたが，座標平面上で単位円を使っても行うことができます．各自で考えてみてください．

xy 平面において，点 A は原点 O を中心とする半径 1 の円周の第 1 象限にある部分を動き，点 B は x 軸上を動く．ただし，線分 AB の長さは 1 であり，線分 AB は両端 A, B 以外の点 C で円周と交わるものとする．

(1)　$\theta = \angle\mathrm{AOB}$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(2)　BC の長さを θ で表せ．

(3)　線分 OB の中点を M とするとき，線分 CM の長さの範囲を求めよ．

xy 平面において，点 A は原点 O を中心とする半径 1 の円周の第 1 象限にある部分を動き，点 B は x 軸上を動く．ただし，線分 AB の長さは 1 であり，線分 AB は両端 A, B 以外の点 C で円周と交わるものとする．

（1） $\theta = \angle\mathrm{AOB}$ のとり得る値の範囲を求めよ．

（2） BC の長さを θ で表せ．

（3） 線分 OB の中点を M とするとき，線分 CM の長さの範囲を求めよ．

【テーマ】：平面図形の計量

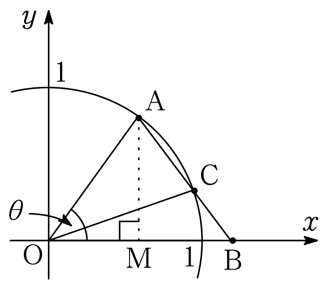
方針

(1) は，線分 OB の中点を考えてみましょう．(2) は，$\triangle\mathrm{AOB}$ と $\triangle\mathrm{OAC}$ が二等辺三角形になっていることに注意を向けます．(3) は余弦定理を用います．

♣ ♠

解答

（1） 題意から，$0^\circ < \theta < 90^\circ$ である．線分 OB の中点を M とすると，$\triangle\mathrm{AOB}$ は $\mathrm{OA} = \mathrm{AB}$ の二等辺三角形であるから，$\mathrm{AM} \perp \mathrm{OB}$ である．また，$\mathrm{A}(\cos\theta, \sin\theta)$ であることから，$\mathrm{M}(\cos\theta, 0)$ となる．線分 AB が円周と交点をもつためには，$\mathrm{OB} > 1$ でなければならないので，



$$\mathrm{OM} > \frac{1}{2} \iff \cos\theta > \frac{1}{2} \iff 0^\circ < \theta < 60^\circ \quad \cdots\cdots ①$$

となる．また，$\angle\mathrm{OAC} = 180^\circ - 2\theta$ であり，線分 AB が円周と交点をもつためには，$\angle\mathrm{OAC} < 90^\circ$ でなければならないので，

$$180^\circ - 2\theta < 90^\circ \iff 2\theta > 90^\circ \iff \theta > 45^\circ \quad \cdots\cdots ②$$

よって，①, ② より，θ のとり得る値の範囲は，

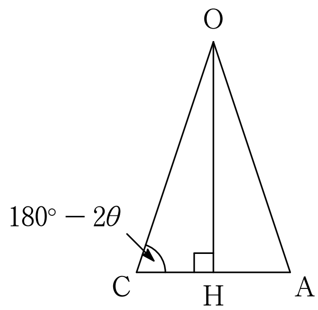
$\boldsymbol{45^\circ < \theta < 60^\circ}$ ……**(答)**

（2） $\triangle\mathrm{OAC}$ は二等辺三角形であり，$\angle\mathrm{OCA} = \angle\mathrm{OAC} = 180^\circ - 2\theta$ であるから，線分 AC の中点を H とすると，

$$\mathrm{AC} = 2\mathrm{CH} = 2\mathrm{OC}\cos(180^\circ - 2\theta) = -2\cos 2\theta$$

である．よって，

$$\mathrm{BC} = \mathrm{AB} - \mathrm{AC} = \boldsymbol{1 + 2\cos 2\theta} \text{……(答)}$$



（3） 点 $\mathrm{M}(\cos\theta, 0)$, $\mathrm{B}(2\cos\theta, 0)$ であるから，

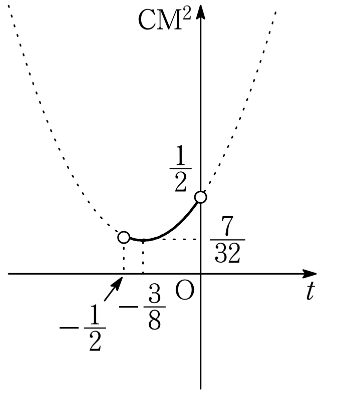
$$\mathrm{BM} = \cos\theta,\ \mathrm{BC} = 1 + 2\cos 2\theta,\ \angle\mathrm{CBM} = \theta$$

であるから，$\triangle\mathrm{BCM}$ で余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{CM}^2 &= \mathrm{BC}^2 + \mathrm{BM}^2 - 2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{BM}\cos\theta \\ &= (1 + 2\cos 2\theta)^2 + \cos^2\theta - 2(1 + 2\cos 2\theta)\cos^2\theta \\ &= (1 + 2\cos 2\theta)^2 + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} - 2(1 + 2\cos 2\theta)\cdot\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\end{aligned}$$

ここで，$\cos 2\theta = t$ とおくと，(1) から，$90^\circ < 2\theta < 120^\circ$ であるから，$-\dfrac{1}{2} < t < 0$ であり，

$$\begin{aligned} \mathrm{CM}^2 &= (1+2t)^2 + \frac{1+t}{2} - 2(1+2t)\cdot\frac{1+t}{2} \\ &= 1 + 4t + 4t^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t - 1 - 3t - 2t^2 \\ &= 2t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{1}{2} \\ &= 2\left(t + \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{7}{32} \end{aligned}$$



$-\dfrac{1}{2} < t < 0$ より，右図から

$$\frac{7}{32} \leqq \mathrm{CM}^2 < \frac{1}{2} \qquad \therefore\ \frac{\sqrt{14}}{8} \leqq \mathrm{CM} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

を得る．ゆえに，線分 CM の長さの範囲は，

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{14}}{8} \leqq \mathrm{CM} < \frac{\sqrt{2}}{2}}$$……(答)

◇ ♡

解説

(1) は，答えの予想はつくかもしれないが，記述するのがやや難しく感じるかもしれません．別解として，直線 AB の方程式を求め，円 $x^2 + y^2 = 1$ との交点の y 座標の値を求めることから θ のとり得る値を求める方法もあります．

(2) は二等辺三角形の性質をうまく利用します．余弦定理を用いてもできますが，解答のような解き方も大切な考え方なので，余弦定理でやった人は，別解という意味でも解き方を知っておいて下さい．

(3) は，余弦定理を用いて CM^2 を求めます．$\cos 2\theta = t$ とおいて，t の 2 次関数に帰着させるのがポイントですが，

置き換えしたら範囲変更

を忘れないようにしましょう．